Synthetische Untersuchungen über lineare Kegelschnittsysteme erster, zweiter und dritter Stufe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde,

der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Arthur Jopke,

Oberlehrer an der Ev. Realschule 2 zu Breslau.

Freitag, den 11. September 1908, Mittags 12 Uhr

im Auditorium IV

Vortrag:

„Die Behandlung des mathematischen Funktionsbegriffs auf der Mittelstufe der Gymnasien"

und

Promotion.

Breslau 1908.

Buchdruckerei H. Fleischmann

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Herr Geheimrat Professor Dr. **Sturm**.

Das mündliche Examen hat stattgefunden am 24. Juni 1908.

Dem Andenken meines Vaters.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548206_0110

I. Einfach, zweifach und dreifach spezielle Büschel in Kegelschnittnetzen.

Das lineare Kegelschnittsystem zweiter Stufe, das Kegelschnittnetz, ist definiert durch drei Paare konjugierter Punkte in allgemeiner Lage. Man baut es aus dreien seiner Elemente, die nicht demselben Büschel angehören, in der Weise auf, dass man „fächerförmig" eine der drei Konstituenten durch Büschel mit allen Kegelschnitten des Büschels verbindet, das durch die beiden anderen bestimmt ist. Aus der Bestimmung des Kegelschnittnetzes durch drei seiner Elemente erhellt, dass seine Mannigfaltigkeit ∞^9 beträgt.

Dem Kegelschnittnetze sind zwei Kernkurven zugeordnet, die nach Jacobi bezw. Cayley benannt werden.

Die Jacobische Kurve $J^{(3)}$, eine Kurve dritter Ordnung, ist definiert 1) als Kurve der Doppelpunkte der ∞^1 Geradenpaare des Netzes oder 2) als Ort der ∞^1 Paare von Punkten, die inbezug auf alle Kegelschnitte des Netzes konjugiert sind [1]).

Die Cayleysche Kurve $C_{(3)}$, eine Kurve dritter Klasse, ist definiert 1) als Enveloppe der Geraden der ∞^1 Geradenpaare des Netzes oder 2) als Ort der Verbindungsgeraden konjugierter Punkte oder 3) als Enveloppe der Geraden der Ebene, die von den Elementen des Netzes in den Punktepaaren einer Involution geschnitten werden [2]).

---

[1]) Bezüglich der dritten Definition vergl. No. 1.

[2]) Ueber Kegelschnittnetze (Aufbau, Kernkurven u. s. w.) vgl. z. B. Steiner-Schröter, Vorlesungen über synthetische Geometrie, 3. Aufl. S. 469 flg. Vgl. ferner Reye, die Geometrie der Lage, 4. Aufl. 1. Abteil. S. 278 flg.

Die Jacobische Kurve trägt als Kurve dritter Ordnung drei Systeme konjugierter Punkte, von denen hier, wo das Kegelschnittnetz den Ausgangspunkt bildet, nur dasjenige von Interesse ist, dessen Punkte bezüglich aller Elemente des Netzes konjugiert sind. Koinzidenzen sind in einer Verwandtschaft konjugierter Punkte auf einer Kurve 3. O. im allgemeinen ausgeschlossen (Vgl. No. 10).

1. Die Bedingung für zwei Kegelschnitte, sich zu berühren, oder allgemeiner gesprochen, zwei vereinigte Schnitte zu haben, ist eine einfache; ebenso legt man auch einem Kegelschnittbüschel mit der Forderung, dass zwei und damit alle Kegelschnitte des Büschels einander in einem Punkte berühren, dass sich zwei seiner Grundpunkte vereinigen, eine einfache Bedingung auf (Mannigfaltigkeit dieser Büschel: ∞^7). In der doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit der Büschel eines allgemeinen Kegelschnittnetzes N gibt es daher ∞^1 solcher ausgezeichneter Büschel $\mathfrak{B}$. Wir fragen 1) nach dem Ort der Berührungspunkte der Kurven der Büschel $\mathfrak{B}$, 2) nach dem Ort der gemeinsamen Tangenten.

Sei P ein Punkt, in dem zwei Grundpunkte eines Büschels unseres Netzes N zusammengefallen sind. Mit den Grundpunkten haben sich dann auch zwei Geradenpaare des Büschels vereinigt, in dem Geradenpaar nämlich, das sich aus den von P nach den beiden weiteren Grundpunkten C_1 und C_2 gehenden Strahlen t_1 und t_2 zusammensetzt. P stellt den Doppelpunkt der beiden vereinigten Geradenpaare dar und ist damit als Punkt der Jacobischen Kurve erkannt. Und ist umgekehrt P ein Punkt der $J^{(3)}$, so konstituieren das Geradenpaar, dessen Doppelpunkt P ist, und ein beliebiger zweiter durch P gehender Netzkegelschnitt ein zum Netz gehöriges Büschel, in dem sich zwei Grundpunkte in P vereinigt haben, dessen sämtliche Kurven einander in P berühren. Mit anderen Worten: durch jeden Punkt P der Jacobischen Kurve wird aus dem Netze ein Büschel herausgehoben, dessen Kegelschnitte in P eine Berührung 1. Ordnung eingehen.

Die gemeinsame Tangente der Elemente eines solchen Büschels ist ersichtlich gegeben durch die dritte ausser t_1 und t_2 von P an die Cayleysche Kurve gehende Tangente t.

Da jeder Netzkegelschnitt K der $J^{(3)}$ im allgemeinen in $2.3 = 6$ Punkten P begegnet, so gehört er in der Regel 6 solchen ausgezeichneten Büscheln $\mathfrak{B}$ an. (Dies Ergebnis können wir auch in der Weise ableiten, dass wir K und irgend ein Büschel, dem K nicht angehört, als Konstituenten des Netzes auffassen und dann den Satz benutzen, dass es in einem Kegelschnittbüschel immer 6 Kurven gibt, die einen gegebenen Kegelschnitt K berühren.) Die Tangenten des Netzkegelschnitts K in diesen 6 Punkten P berühren auch die $C_{(3)}$; und da $C_{(3)}$ und K nur $3.2 = 6$ gemeinsame Tangenten besitzen, so gilt also der Satz: Die sechs gemeinschaftlichen Tangenten der Cayleyschen Kurve und irgend eines Kegelschnittes des Netzes berühren diesen in den sechs Punkten, in denen er von der Jacobischen Kurve getroffen wird.

Die Geradenpaare, als Kegelschnitte des Netzes betrachtet, gehören wegen ihrer speziellen Lage zu $J^{(3)}$ nur je 5 Büscheln der oben gekennzeichneten Art an; aber nur in den 4 vom Doppelpunkte verschiedenen Schnittpunkten mit $J^{(3)}$ berühren die Geraden eines Geradenpaares die Elemente des jeweiligen Büschels $\mathfrak{B}$. Jede Tangente der Cayleyschen Kurve ist also für zwei Büschel $\mathfrak{B}$ gemeinsame Tangente aller Kegelschnitte; die beiden Berührungspunkte repräsentieren ein Paar konjugierter Punkte und gleichzeitig die Doppelpunkte der Involution, welche von den Kegelschnitten des Netzes in die Gerade eingeschnitten wird. Diesen Tatbestand können wir auch so formulieren: Zwei Büschel $\mathfrak{B}$, deren Kurven sich bezüglich in konjugierten Punkten P, Q berühren, haben ein Geradenpaar gemeinsam, dessen einer Bestandteil die gemeinschaftliche Tangente PQ aller Elemente der beiden Büschel ist.

Ueber die Beziehungen zwischen der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve gilt demnach: Von jedem Punkte P von $J^{(3)}$ kommen 3 Tangenten an $C_{(3)}$; die eine, t, verbindet P mit seinem konjugierten Punkte Q und stellt die gemeinsame Tangente aller durch P (bzw. durch Q) gehenden Netzkegelschnitte dar; die beiden anderen, t_1 und t_2, bilden das Geradenpaar, dessen Doppelpunkt P ist. — Jede Tangente t der $C_{(3)}$ ihrerseits schneidet die $J^{(3)}$ in drei Punkten: von ihnen sind zwei die beiden konjugierten Punkte, die t verbindet; der dritte ist der Doppelpunkt des Geradenpaares, zu dem t gehört.

2. Auch die beiden anderen Grundpunkte C_1 und C_2 der Büschel $\mathfrak{B}$ erfordern eine gesonderte Betrachtung. Von den drei von einem Grundpunkte C an die Cayleysche Kurve gelegten Tangenten sind die beiden, die nach den in P vereinigten Grundpunkten hingehen, unendlich benachbart. Jeder Grundpunkt C liegt somit auf der $C_{(3)}$; und da umgekehrt jeder Punkt der Cayleyschen Kurve wegen der beiden in ihm sich schneidenden unendlich nahen Tangenten ein Grundpunkt C eines ausgezeichneten Büschels $\mathfrak{B}$ ist, so ist damit eine Definition der $C_{(3)}$ als Punktkurve gefunden (vgl. unten). Aehnlich der involutorischen Korrespondenz der konjugierten Punkte auf der Jacobischen Kurve tritt also auch auf der gleichfalls nicht unikursalen Punktreihe der $C_{(3)}$ eine Paarung ein, indem zwei Punkte C_1 und C_2 einander in beiderlei Sinne entsprechen, die als Grundpunkte C zu dem nämlichen Büschel $\mathfrak{B}$ gehören. Diese Paarung überträgt sich auf die in entsprechenden Punkten berührenden Tangenten t_1 und t_2 der $C_{(3)}$, und damit werden wir auf die der oben genannten involutorischen Punktkorrespondenz der $J^{(3)}$ dual gegenüberstehende eindeutige und involutorische Korrespondenz der konjungierten Tangenten der Cayleyschen Kurve geführt. Unmittelbar lesen wir aus der Figur ab, dass sich zwei konjugierte Tangenten t_1 und t_2, die immer ein Geradenpaar des Netzes bilden, auf der Jacobischen Kurve schneiden, ferner dass die Be-

rührungssehne $C_1\ C_2$ zweier konjugierter Tangenten selbst Tangente der $C_{(3)}$ ist, dual zu dem Satze, dass zwei konjugierte Punkte der Jacobischen Kurve den nämlichen Tangentialpunkt besitzen. Auch in der involutorischen Korrespondenz der konjugierten Tangenten der $C_{(3)}$ tritt eine Koinzidenz von gepaarten Elementen im allgemeinen nicht ein. (Vgl. No. 6).

Zusammenfassend können wir also sagen: In jedem allgemeinen Kegelschnittnetz N gibt es ∞^1 Büschel $\mathfrak{B}$, deren sämtliche Kurven sich je in einem Punkte P berühren. In P haben sich zwei Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{B}$ vereinigt; die beiden weiteren Grundpunkte C_1 und C_2 sind untereinander und von P getrennt. Der Ort der Berührungspunkte P ist die Jacobische Kurve $J^{(3)}$ des Netzes, die Enveloppe der gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte der Büschel $\mathfrak{B}$ seine Cayleysche Kurve $C_{(3)}$, die zugleich den Ort der Grundpunkte C darstellt.

Im Anschluss an die Figur der Geradenpaare der Büschel $\mathfrak{B}$ erledigt sich auch leicht die Frage nach den Tangenten der Jacobischen Kurve. Fassen wir ihre Tangente p in einem Punkte P auf als Grenzlage des Verbindungsstrahles der beiden in P hineinrückenden Doppelpunkte des Büschels $\mathfrak{B}$, das P bestimmt, so folgt unmittelbar aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks für unsere spezielle Figur der Grundpunkte eines Büschels $\mathfrak{B}$, dass p der vierte harmonische Strahl zu den drei von P an die Cayleysche Kurve gehenden Tangenten ist, und zwar zugeordnet der gemeinsamen Tangente t der Kurven von $\mathfrak{B}$ inbezug auf die beiden konjugierten Tangenten t_1 und t_2. Vgl. den dualen Satz für den Berührungspunkt einer Tangente der Cayleyschen Kurve.

3. Die nächst spezielleren Büschel sind diejenigen, deren Kegelschnitte sich dreipunktig berühren oder einander oskulieren. Ebenso wie die Bedingung für zwei Kegelschnitte, drei vereinigte Schnitte zu haben, eine zweifache

st, so legt man einem Kegelschnittbüschel mit der Forderung, dass zwei und damit alle Kurven des Büschels sich dreipunktig berühren, dass sich drei seiner Grundpunkte vereinigen, eine doppelte Bedingung auf (Mannigfaltigkeit dieser Büschel: ∞^6). Es muss daher unter den ∞^2 Büscheln unseres Netzes N eine endliche Anzahl solcher zweifach spezieller Büschel $\mathfrak{B}_0$ geben. Um die Vorstellung zu fixieren, denken wir uns ein Büschel $\mathfrak{B}_0$ in der Weise entstanden, dass einer der beiden Grundpunkte C, etwa C_1, den wir bereits als der $C_{(3)}$ angehörig erkannt haben, sich mehr und mehr dem Punkte P nähere und schliesslich in P, der fortab P_0 heisse, hineinrücke. Von den Strahlen des oben betrachteten harmonischen Wurfes vereinigen sich dann zwei nicht gepaarte, der Strahl $t \equiv t_0$ und der Strahl t_1; infolgedessen muss mit ihnen noch einer der beiden anderen, und zwar ersichtlich die Tangente $p \equiv p_0$ der Jacobischen Kurve, zusammenfallen. Punkt P_0 stellt sich somit als ein Punkt dar, der der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve gemeinschaftlich ist und für beide Kurve dieselbe Tangente ($t_0 \equiv p_0$) besitzt, d. h. also als ein Punkt, in dem sich $J^{(3)}$ und $C_{(3)}$ berühren.

Bevor wir in eine weitere Erörterung dieses Problems eintreten, müssen wir daher die Frage untersuchen, ob überhaupt Berührungspunkte der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve und in welcher Anzahl sie vorhanden sind. Es sei P_0 ein gemeinsamer Punkt von $J^{(3)}$ und $C_{(3)}$. In der Tangente der Cayleyschen Kurve in P_0 haben sich dann zwei Strahlen jenes harmonischen Wurfes, und zwar t_0 und t_1 — denn konjugierte Tangenten t_1 und t_2 fallen nicht zusammen — vereinigt, infolgedessen mit ihnen noch ein dritter Strahl, p_0; d. h. aber: $J^{(3)}$ und $C_{(3)}$ berühren sich im Punkte p_0 [1]). Die Schnittpunkte von $J^{(3)}$ und $C_{(3)}$ fallen also immer paarweise zusammen; und da $C_{(3)}$, als klassenallgemeine Kurve von der sechsten Ordnung, mit $J^{(3)}$ ins-

[1]) Vgl. den dualen Beweis bei Steiner-Schröter, S. 490.

gesamt $6.3 = 18$ Punkte gemeinsam hat, so berühren sich beide Kurven neunmal.

Jeder der neun Punkte P_0 bestimmt nun ein Büschel, dessen Kurven einander in P_0 oskulieren. Denn da alle durch P_0 gehenden Netzkegelschnitte den Strahl $t_0 = t_1 \equiv p_0$, der mit t_2 zusammen das einzige Geradenpaar des Büschels darstellt, im Doppelpunkte P_0 berühren, so vereinigen sich in P_0 drei der Grundpunkte des Büschels. Wir haben somit das Ergebnis:

In jedem allgemeinen Kegelschnittnetze gibt es neun Büschel $\mathfrak{B}_0$, deren sämtliche Kurven sich je in einem Punkte P_0 dreipunktig berühren. Die neun Oskulationspunkte P_0 sind die Berührungspunkte der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve, deren gemeinsame Tangenten gleichzeitig die Tangenten der Büschel $\mathfrak{B}_0$ in jenen Punkten repräsentieren.

Schliesslich lässt sich noch, wiederum mit Hülfe des harmonischen Strahlenwurfs, beweisen, dass die Kurven der neun Büschel $\mathfrak{B}_0$ die einzigen Kegelschnitte des Netzes sind, die die Jacobische Kurve berühren. Denn aus dem Zusammenfallen des Strahles t, der gemeinsamen Tangente der Elemente eines Büschels $\mathfrak{B}$, mit der Tangente p der $J^{(3)}$ folgt, dass sich mit ihnen noch ein dritter Strahl jenes Wurfes, etwa t_1, vereinigt, und so erhalten wir die eben betrachtete Situation. Aehnliches gilt bezüglich der Cayleyschen Kurven. Denn ein Netzkegelschnitt, der $C_{(3)}$ berührt, und das Geradenpaar, dessen einer Bestandteil die Tangente im Berührungspunkte ist, konstituieren immer ein Büschel der Art $\mathfrak{B}$; der Berührungspunkt gehört demnach auch der $J^{(3)}$ an, und somit kommen wir wieder zu einem Punkte P_0 und einem Büschel $\mathfrak{B}_0$ zurück. Je zweien der Büschel $\mathfrak{B}_0$ ist eine Kurve gemeinsam, und da wir 9 Elemente auf $\binom{9}{2} = 36$ Arten paaren können, so gibt es im Netze 36 Kegelschnitte, welche $J^{(3)}$ — und auch $C_{(3)}$ — doppelt berühren. Bemerkt sei ferner noch, dass in jedem Büschel $\mathfrak{B}_0$ die

beiden Kegelschnitte, die $J^{(3)}$ bzw. $C_{(3)}$ dreipunktig berühren, in dem Geradenpaar des Büschels zusammengefallen sind.

4. Die 9 Oskulationspunkte P_0 stehen in enger Beziehung zu den Singularitäten sowohl der Jacobischen wie der Cayleyschen Kurve. Der dritte Schnitt der gemeinsamen Tangente $p_0 \equiv t_0$ der beiden Kurven in einem Punkte P_0 mit $J^{(3)}$ ist der P_0 konjugierte Punkt Q_0, gleichzeitig aber auch sein Tangentialpunkt. Auf Grund des Satzes, dass konjugierte Punkte der $J^{(3)}$ den nämlichen Tangentialpunkt besitzen, muss demnach der dritte Schnittpunkt der Tangente der $J^{(3)}$ in Q_0 gleichfalls nach Q_0 fallen; d. h. die Tangente der Jacobischen Kurve in Q_0 schneidet diese in drei zusammenfallenden Punkten, sie ist daher eine Wendetangente und ihr Berührungspunkt Q_0 ein Wendepunkt der $J^{(3)}$. Die neun gemeinsamen Tangenten p_0 der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve schneiden also die erstere zum dritten Male in den neun Wendepunkten Q_0 [1]). In ähnlicher Weise werden wir auch zu den den Wendetangenten der $J^{(3)}$ dual gegenüberstehenden Rückkehrpunkten der $C_{(3)}$ geführt. Von dem isolierten, vierten Grundpunkt R_0 jedes der Büschel $\mathfrak{B}_0$ gehen drei unendlich nahe Tangenten der Cayleyschen Kurve aus, die Verbindungsstrahlen mit den drei in P_0 vereinigten Grundpunkten. R_0 ist demnach eine Spitze der $C_{(3)}$ und $R_0 P_0$ ihre Rückkehrtangente. (Der Beweis lässt sich auch dual dem vorigen nachbilden) [2]).

Jedem Punkte P_0 ist eindeutig je ein Punkt Q_0 und und R_0 zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jedem Q_0 eindeutig ein P_0 als konjugierter Punkt der $J^{(3)}$, zu jedem R_0 ein P_0 als Berührungspunkt der zur Spitzentangente $R_0 P_0$ konjugierten Tangente der $C_{(3)}$. Ebenso besteht zwischen den Wendepunkten Q_0 der $J^{(3)}$ und den Rückkehrtangenten r_0 der $C_{(3)}$ eine eindeutige Zuordnung, da man durch eindeutige Konstruktion von Q_0 zu r_0 und von

[1]) vgl. z. B. Steiner-Schröter, S. 491.
[2]) a. a. O. S. 496.

r_0 wieder zu Q_0 zurückgelangt. Wir haben also neun Dreiecke der Art $P_0 Q_0 R_0$. Eine Ecke, P_0, ist Berührungspunkt von $J^{(3)}$ und $C_{(3)}$, die Seite $P_0 Q_0 \equiv p_0$ die gemeinsame Tangente; Q_0 liegt auf $J^{(3)}$ und ist einer seiner neun Wendepunkte; R_0 gehört der $C_{(3)}$ an und repräsentiert einen ihrer neun Rückkehrpunkte, $P_0 R_0 \equiv r_0$ die Spitzentangente. P_0 und Q_0 sind konjugierte Punkte der $J^{(3)}$, $Q_0 P_0 \equiv p_0$ und $P_0 R_0 \equiv r_0$ konjugierte Tangenten der $C_{(3)}$. Ferner ist $P_0 R_0$ die harmonische Polare des Wendepunktes Q_0 bezüglich der Jacobischen Kurve, d. i. der Ort der vierten harmonischen Punkte, zugeordnet dem Punkte Q_0 auf den durch ihn gelegten Strahlen je inbezug auf die beiden weiteren Schnitte mit $J^{(3)}$. Denn laut Definition liegen auf der harmonischen Polare von Q_0 die Berührungspunkte P_0, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ der der drei von Q_0 ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten der $J^{(3)}$, und da $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ konjugierte Punkte der Jacobischen Kurve sind, so stellt $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ die von P_0 kommende anderwärts berührende Tangente der $C_{(3)}$ dar und ist sonach mit $P_0 R_0$ identisch. Dual ist Q_0 der harmonische Pol der Rückkehrtangente r_0 bezüglich der Cayleyschen Kurve.

Ueber die Wendepunkte Q_0 der $J^{(3)}$ und die Rückkehrtangenten r_0 der $C_{(3)}$ gelten die dualen Sätze: Die Verbindungsgerade zweier Wendepunkte der $J^{(3)}$ schneidet die Kurve noch in einem dritten Wendepunkte; und: durch den Schnittpunkt zweier Spitzentangenten der $C_{(3)}$ geht immer noch eine dritte. Aus dem letzten Satze folgt unmittelbar, dass das Büschel, das zwei ausgezeichnete Geradenpaare (r_0, p_0) und (r_0', p_0') im Netze bestimmen, noch ein drittes Geradenpaar dieser Art, (r_0'', p_0''), enthält; der eine Büschelgrundpunkt ist der Konkurrenzpunkt der drei Rückkehrtangenten r_0, r_0', r_0''. Ferner sind die den Doppelpunkten P_0, P_0', P_0'' dieser drei Geradenpaare konjugierten Wendepunkte Q_0, Q_0', Q_0'' allineiert auf Grund des Satzes, dass die den Ecken eines auf der Tripelkurve liegenden Tripeldreiecks konjugierten

Punkte einer Geraden angehören [1]); und das bedeutet, dass in der eindeutigen Zuordnung, die zwischen den 9 Spitzentangenten der $C_{(3)}$ und den 9 Wendepunkten der $J^{(3)}$ besteht, drei in einem Punkte konkurrierenden Spitzentangenten der Cayleyschen Kurve gerade drei allineierte Wendepunkte der Jacobischen Kurve korrespondieren und umgekehrt. So erscheint auch jedem der 12 Konkurrenzpunkte je dreier Rückkehrtangenten der $C_{(3)}$ eine der 12 Wendepunktsgeraden der $J^{(3)}$ eindeutig zugeordnet.

5. Den in No. 3 betrachteten Büscheln $\mathfrak{B}_0$ sind in der Spezialität diejenigen Büschel koordiniert, deren Grundpunkte sich zweimal zu je zweien vereinigt haben, die bekanntlich Büschel-Schaaren sind. Gleichwohl ist in einem Netze eine Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte im allgemeinen nicht vorhanden. Denn da in einem solchen Büschel sich je zwei Geradenpaare in einer Doppelgeraden, der Berührungssehne s, vereinigt haben, deren jeder Punkt einen Doppelpunkt darstellt, so löst sich, sobald in einem Netze eine Büschel-Schaar vorkommt, von dem Ort der Doppelpunkte, der Jacobischen Kurve $J^{(3)}$, die Gerade s ab, und als Restkurve bleibt ein Kegelschnitt $J^{(2)}$ übrig. Da nun im allgemeinen ein Zerfallen der Jacobischen Kurve nicht eintritt, so folgern wir umgekehrt, dass ein allgemeines Netz eine Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte nicht enthält.

Es liege nun ein spezielles Kegelschnittnetz $\mathfrak{N}_0$ [2]) mit einer Büschel-Schaar vor. Konstruieren wir aus ihrer Doppelgeraden s und einem beliebigen weiteren Netzkegelschnitt, der ihr nicht angehört, das Büschel, so erhalten wir wieder eine zum Netze gehörige Büschel-Schaar, da die vier Grundpunkte zweimal zu je zweien zusammenfallen. Die Doppelpunkte T_0, U_0 der Involution, welche die Grundpunktepaare A, A′ und B, B′ jener beiden Büschel-Schaaren auf s bestimmen, sind inbezug auf alle ihre Elemente und

[1]) vgl. a. a. O. S. 475.

[2]) Vgl. z. B. Reye, a. a. O. S. 291.

somit inbezug auf alle Kurven des Netzes konjugiert, da irgend zwei Kegelschnitte der einen Büschel-Schaar und irgend einer der anderen das Netz festlegen. Alle Kegelschnitte des Netzes, die einem Punkt X der Geraden s gemeinsam haben, gehen auch durch den X in der Involution (T_0, U_0) gepaarten Punkt X′ und bilden gleichfalls eine Büschel-Schaar sich — in X und X′ — doppelt berührender Kegelschnitte. So ist unser Netz $\mathfrak{N}_0$ anschaulich aufgebaut: Unter den ∞^2 Büscheln befinden sich ∞^1 Büschel-Schaaren mit gemeinschaftlicher Berührungssehne s, auf der ihre Grundpunktepaare eine Involution bilden. Eine weitere Büschel-Schaar ausserhalb des betrachteten Systems gibt es im allgemeinen nicht; denn das Vorhandensein einer solchen würde ein nochmaliges Zerfallen der Jacobischen Kurve bedingen, was im allgemeinen nicht zutrifft. Die Büschel-Schaaren sind so über das Netz verteilt, dass jeder Netzkegelschnitt, abgesehen von dem ausgearteten Kegelschnitt s, genau einer Büschel-Schaar angehört.

6. Auf s liegt nur ein Paar konjugierter Punkte: T_0, U_0. Die den übrigen Punkten von s konjugierten Punkte erfüllen demnach den Restbestandteil der Jacobischen Kurve, den Kegelschnitt $J^{(2)}$. Durchläuft also Punkt T kontinuierlich die Gerade s, so beschreibt der ihm bezüglich des Netzes konjugierte Punkt U den Jacobischen Kegelschnitt $J^{(2)}$; und zwar kreuzt U, wenn T auf s einen der beiden Doppelpunkte, etwa T_0, passiert, der Stetigkeit wegen die Gerade s im anderen Doppelpunkte U_0. Kegelschnitt $J^{(2)}$ und Gerade s begegnen sich also in den beiden auf s liegenden konjugierten Punkten T_0 und U_0. Da Gerade und Kegelschnitt unikursale Gebilde sind, so stellt sich die involutorische Korrespondenz der konjugierten Punkte dar als Projektivität zwischen der geraden Punktreihe s und der krummen Punktreihe auf $J^{(2)}$, allerdings von der doppelten Spezialität, dass die beiden gemeinsamen Elemente T_0, U_0 sich in beiderlei Sinne entsprechen [1]).

[1]) Dieser Umwandlung begegnet man häufiger; die einfachsten Fälle sind wohl eine Involution auf einem Kegelschnitt, wenn dieser

Das Erzeugnis dieser speziellen Projektivität ist die Cayleysche Kurve des Netzes $\mathfrak{N}_0$, und so können wir ihre Singularitäten in diesem Falle ableiten. Liegt nämlich eine Projektivität zwischen den Punktreihen einer Geraden und eines Kegelschnitts vor, von der allgemeinen Art, dass jedem der beiden gemeinsamen Punkte der beiden Träger verschiedene Punkte entsprechen, je nachdem sie zu der einen oder der anderen Punktreihe gerechnet werden, so wird von den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Kurve dritter Klasse eingehüllt, für welche die gegebene Gerade eine Doppeltangente ist; die Berührungspunkte sind die den gemeinsamen Punkten, als Punkten des Kegelschnitts gerechnet, auf der Geraden korrespondierenden Punkte. In unserem vorliegenden speziellen Falle, wo die gemeinsamen Punkte T_0, U_0 der beiden Träger sich in beiderlei Sinne entsprechen, sind T_0 und U_0 selbst die Berührungspunkte. Durch die Doppelpunkte T_0, U_0 der auf s liegenden Involution läuft also ausser dem Jacobischen Kegelschnitt $J^{(2)}$ auch die Cayleysche Kurve, so zwar dass sie s in T_0 und U_0 berührt. In der Gesamtzahl der Schnittpunkte der vollen, aus s und $J^{(2)}$ bestehenden Jacobischen Kurve 3. Ordnung mit der Cayleyschen Kurve, die als Kurve dritter Klasse mit einer Doppeltangente von der Ordnung 4 ist, zählen die Punkte T_0, U_0 je dreifach; die 6 übrigen Schnittpunkte, die auf $J^{(2)}$ liegen, fallen paarweise zusammen und reduzieren sich auf drei Punkte P_0, in denen $J^{(2)}$ und $C_{(3)}$ einander berühren. Die Punkte, in denen die gemeinsamen Tangenten von $C_{(3)}$ und $J^{(2)}$ in den Punkten P_0 die Gerade s treffen, sind als die den P_0 konjugierten Wendepunkte Q_0 (Wendetangente s) anzusehen. Die von den 3 Punkten P_0 ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten der $C_{(3)}$ konkurrieren in einem Punkte und sind die drei Spitzentangenten; damit ist die Zahl der Rück-

in ein Geradenpaar ausartet (vgl. No. 13), und eine Involution in einer in zwei Strahlenbüschel zerfallenden Regelschaar. Vgl. ferner R. Sturm, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, Bd. III, No. 829, 839 u. a.

kehrtangenten der Cayleyschen Kurve erschöpft, da durch das Vorhandensein einer Doppeltangente bei einer Kurve 3. Klasse die Zahl ihrer Spitzen um 6 vermindert wird. Es sei ferner noch darauf hingewiesen, dass die Cayleysche Kurve im vorliegenden Falle unikursul ist; in zweien der ∞^1 Paare konjugierter Tangenten haben sich die Strahlen vereinigt, und die beiden Koinzidenzstrahlen wiederum sind in der Doppeltangente s zusammengefallen.

7. Die Mannigfaltigkeit der Netze $\mathfrak{N}_0$ beträgt ∞^8 [1]; sie stehen somit bezüglich ihrer Spezialität auf derselben Stufe wie die Netze mit einem Grundpunkt, deren Jacobische Kurve eine Kurve 3. O. mit einem Doppelpunkt ist. Dem steht gegenüber, dass die Mannigfaltigkeit der in Kegelschnitt und Gerade zerfallenden Kurven dritter Ordnung nur ∞^7 beträgt. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich dadurch auf, dass, abweichend von den allgemeinen Netzen und den Netzen mit einem Grundpunkt, wo die zugrundeliegende Jacobische Kurve eine endliche Zahl — 3 bzw. 1 — von Systemen konjugierter Punkte trägt, im vorliegenden Falle auf der zerfallenden $J^{(3)}$ ∞^1 Systeme konjugierter Punkte der gekennzeichneten Art möglich sind. Jede Projektivität zwischen s und $J^{(2)}$, in der die gemeinsamen Elemente T_0, U_0 sich in beiderlei Sinne entsprechen, stellt ein solches System dar. Projektivitäten dieser Art gibt es aber ∞^1, da zwei Paare, die in beiderlei Sinne einander korrespondierenden T_0, U_0, festliegen und das dritte bestimmende Paar willkürlich hinzugefügt werden kann.

Zu einer in Gerade und Kegelschnitt zerfallenden Jacobischen Kurve führen auch die Netze mit zwei Grundpunkten [2]. Die involutorische Korrespondenz der konju-

---

[1]) Abzählung: Ein Netz $\mathfrak{N}_0$ ist bestimmt durch eine Büschel-Schaar (Mächtigkeit: ∞^6) und einen ausserhalb dieser befindlichen Kegelschnitt (∞^5); die sich so ergebende Mannigfaltigkeit ∞^{11} vermindert sich aber auf ∞^8, da jedes Netz aus je einer seiner ∞^1 Büschel-Schaaren in Verbindung mit je einem seiner ∞^2 Kegelschnitte erzeugt werden kann.

[2]) Steiner-Schröter, S. 497, 498.

gierten Punkte gestaltet sich in diesem Falle so, dass sowohl die Gerade s wie der Restkegelschnitt $J^{(2)}$ Träger von gewöhnlichen Involutionen sind, so aber, dass die gemeinsamen Punkte beider Träger, die Grundpunkte des Netzes, die gemeinschaftlichen Doppelpunkte der geraden und der krummen Involution werden. Da die Doppelpunkte somit festliegen, ist immer nur eine involutorische Korrespondenz möglich. Eine aus Gerade und Kegelschnitt bestehende Kurve 3. O., in der geschilderten Weise als Jacobische Kurve aufgefasst, gehört demnach zu genau zu einem Netze, für das jene beiden Punkte Grundpunkte sind. Die Mannigfaltigkeit dieser Netze ist ∞^7, übereinstimmend mit der Mannigfaltigkeit der zerfallenden Kurve 3. Ordnung.

Unser Ergebnis können wir folgendermassen formulieren: Gemäss der Möglichkeit, auf einer einfach zerfallenden Kurve 3. O. zwei gänzlich verschiedenartige Korrespondenzen konjugierter Punkte zu erzeugen, gelangt man, von einer solchen Kurve als Jacobischer Kurve ausgehend, zu zwei ihrem Charakter nach völlig verschiedenen Kegelschnittnetzen. Entsprechend der Tatsache, dass sich die eine Art der Korrespondenz sogar in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit festlegen lässt, ist das erzeugte Netz von grösserer Mächtigkeit und geringerer Spezialität.

8. Wir kehren nunmehr wieder zu unserem Netze $\mathfrak{N}_0$ zurück und wollen speziell die Punkte T_0, U_0 betrachten, der Einfachheit halber in der Annahme, dass sie reell sind. In T_0 und U_0 fallen die Punkte je eines Paares der Involution (T_0, U_0) zusammen; es vereinigen sich in ihnen also auch die Grundpunktepaare je einer Büschel-Schaar, so dass wir in unserem Netze $\mathfrak{N}_0$ zwei ausgezeichnete Büschel-Schaaren erhalten, deren Elemente sich in T_0 bzw. U_0 vierpunktig berühren. In ihnen ist auch das dritte Geradenpaar in eine Doppelgerade übergegangen und hat sich mit s vereinigt. Eine dritte Büschel-Schaar dieser Art ist im allgemeinen im Netze nicht vorhanden.

Nehmen wir umgekehrt an, dass ein Netz eine Büschel-Schaar von Kegelschnitten enthalte, die einander in einem Punkte T_0 superoskulieren. Ihre gemeinschaftliche Tangente s in T_0 bewirkt dann als Doppelgerade ein Zerfallen der $J^{(3)}$. Ein beliebiger weiterer Kegelschnitt des Netzes, der nicht zu jener Büschel-Schaar gehört und s im allgemeinen in getrennten Punkten A, A′ schneidet, bestimmt — wie oben — mit der Doppelgeraden s wiederum eine Büschel-Schaar sich (in A und A′) doppelt berührender Netzkegelschnitte. Ist U_0 der zweite Doppelpunkt der Involution, in der T_0 den ersten Doppelpunkt, A und A′ gepaarte Punkte darstellen, so sind T_0, U_0 inbezug auf jene beiden Büschel-Schaaren und somit bezüglich aller Netzkegelschnitte konjugiert und das einzige solche Paar auf s. So ergibt sich genau dieselbe Figur wie die in No. 5 betrachtete. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Im allgemeinen Kegelschnittnetze N kann es kein Büschel geben, dessen Elemente sich vierpunktig berühren, da die Bedingung für ein Büschel, dass alle vier Grundpunkte ineinanderrücken, eine dreifache ist (Mannigfaltigkeit dieser Büschel: ∞^5). Ist aber in einem speziellen Netze eine Büschel-Schaar sich vierpunktig berührender Kegelschnitte vorhanden, so gibt es immer noch — und im allgemeinen nur noch — eine zweite; gleichzeitig treten noch ∞^1 allgemeinere Büschel-Schaaren sich doppelt berührender Kegelschnitte auf, deren Grundpunkte die Paare einer Punktinvolution bilden, für welche die Superoskulationspunkte der Kurven jener beiden ausgezeichneten Systeme die Doppelpunkte darstellen.

Die Netze $\mathfrak{N}_0$ sind die allgemeinsten Netze, in denen alle Arten spezieller Büschel, einschliesslich der dreifach speziellen, auftreten, nämlich:

1) ∞^1 Büschel $\mathfrak{B}$, deren Elemente sich zweipunktig berühren; die Kurve der Berührungspunkte ist der Jacobische Kegelschnitt $J^{(2)}$.

2) 3 Büschel $\mathfrak{B}_0$, deren Kegelschnitte sich dreipunktig berühren; die Oskulationspunkte sind die Berührungspunkte von $J^{(2)}$ und $C_{(3)}$.

3) ∞^1 Büschel-Schaaren sich doppelt berührender Kegelschnitte; der Ort der Berührungspunkte ist die Gerade s.

4) 2 Büschel-Schaaren, deren Elemente sich vierpunktig berühren; die beiden Superoskulationspunkte sind die Schnittpunkte von $J^{(2)}$ und s.

II. Spezielle Kegelschnittnetze, insbesondere die einfach, zweifach und dreifach speziellen.

9. Die Fortsetzung des ersten Kapitels würde die Untersuchung der speziellen Büschel und Netze im linearen Kegelschnittsystem 3. Stufe, dem Kegelschnittgebüsche, bilden; in anderem Zusammenhange wird dieses Problem teilweise im letzten Kapitel behandelt. Vorauszugehen hat eine Klassifizierung der ein-, zwei- und dreifach speziellen Kegelschnittnetze, mit der sich die folgenden Paragraphen beschäftigen sollen.

Zunächst seien kurz diejenigen Büschel behandelt, die nur Geradenpaare enthalten. Wählen wir als Konstituenten eines Kegelschnittbüschels zwei Geradenpaare so, dass sie eine Gerade x gemeinsam haben, während sich die beiden anderen in einem beliebigen Punkte Y der Ebene schneiden, so erhalten wir ein Büschel, das nur aus Geradenpaaren besteht: Jedes seiner Elemente setzt sich aus der Geraden x und einer Geraden durch den Punkt Y zusammen. Die Fundamentaleigenschaften der Büschel bleiben erhalten: Jeder Punkt Z der Ebene bestimmt ein Geradenpaar, (x, Y Z), des Systems, und in jede Gerade der Ebene schneidet es eine — parabolische — Involution ein. Wir wollen in der Folge ein solches Geradenpaarbüschel durch (x, Y) bezeichnen. Die Mannigfaltigkeit der Büschel (x, Y) beträgt ∞^4.

Inzidiert Y mit x, so ergibt sich eine noch speziellere Art von Büscheln; ihre Mannigfaltigkeit ist nur ∞^3.

Zu einer zweiten Gattung von Geradenpaarbüscheln, gleichfalls von der Mächtigkeit ∞^4, gelangen wir, indem wir als Konstituenten zwei Geradenpaare (y, y′), (z, z′) mit demselben Doppelpunkt annehmen. Die Elemente des Büschels stellen sich dar als die Paare der Strahleninvolution, die durch die Strahlenpaare (y, y′) und (z, z′) definiert ist. Wiederum erkennt man leicht, dass die Grundeigenschaften der Büschel erhalten bleiben. Bezeichnet werde ein solches Geradenpaarbüschel durch Angabe seiner beiden Doppelgeraden a, b, der Doppelstrahlen jener Involution.

Unter den Büscheln (a, b) seien noch besonders diejenigen hervorgehoben, deren Geradenpaare ausser dem Doppelpunkt noch eine Gerade gemeinsam haben, also eine parabolische Strahleninvolution bilden; doch fällt diese Sondergattung mit der oben betrachteten zusammen.

10. Wir wenden uns jetzt den speziellen Kegelschnittnetzen selbst zu. Bei der ersten Reihe der ein-, zwei- und dreifach speziellen Netze, bei den Netzen mit Grundpunkten, wollen wir uns, da diese Gebilde seit langem untersucht sind, im wesentlichen auf eine gedrängte Zusammenstellung der Ergebnisse beschränken.

Es liege ein Netz von Kegelschnitten vor, die sämtlich durch einen Punkt P hindurchgehen[1].) Bezüglich der ∞^1 Geradenpaare des Netzes lässt sich dann leicht erweisen, dass, während der eine Bestandteil sich um den Punkt P dreht, der andere das Tangentenbüschel eines Kegelschnitts $C_{(2)}$ beschreibt. Das Strahlbüschel P und das Tangentenbüschel von $C_{(2)}$ stehen somit in projektiver Beziehung, die jedoch doppelt speziell ist, da die beiden von P an $C_{(2)}$ gelegten Tangenten sich in beiderlei Sinne entsprechen. Das Erzeugnis der projektiven Büschel ist die Jacobische Kurve $J^{(3)}$ unseres Netzes; sie hat in P einen Doppelpunkt, dessen Tangenten in jenen beiden Strahlen gegeben sind. In der auf der unikursalen $J^{(3)}$ liegenden involutorischen Korrespondenz konjugierter Punkte haben sich in zweien der Paare die Elemente vereinigt, und die Koinzidenzpunkte wiederum

[1]) Vgl. z. B. Reye, a. a. O. S. 291.

sind im Doppelpunkte P zusammengefallen. Die Cayleysche Kurve des Netzes setzt sich aus dem Kegelschnitt $C_{(2)}$ und dem Strahlbüschel P zusammen.

Tritt zu dem Grundpunkt P eines Kegelschnittnetzes noch ein zweiter, Q, hinzu, so zerfällt, wie bereits in No. 7 erwähnt, die Jacobische Kurve in die Gerade PQ = o und einen Kegelschnitt $J^{(2)}$, der durch P und Q geht. Die involutorische Korrespondenz konjugierter Punkte löst sich in zwei einzelne Involutionen auf, getragen von der Geraden o und dem Jacobischen Kegelschnitt $J^{(2)}$; die gemeinsamen Doppelpunkte der geraden und der krummen Involution sind die Punkte P und Q, das Zentrum der letzteren daher der Pol O von o bezüglich $J^{(2)}$. Die Geradenpaare eines Netzes mit zwei Grundpunkten P, Q sind von zweierlei Art: Die einen schicken ihre Geraden gesondert durch P und Q; sie mögen Geradenpaare erster Art oder (P, Q)-Geradenpaare heissen. Ihre Doppelpunkte erfüllen die $J^{(2)}$. Von den anderen Geradenpaaren geht der eine Bestandteil gleichzeitig durch P und Q, ist also die Gerade o, während der zweite Bestandteil durch O läuft; wir wollen sie hinfort als Geradenpaare zweiter Art oder als o-Geradenpaare bezeichnen. Ihre Doppelpunkte erfüllen die Gerade o. Den Uebergang von der einen zur anderen Art vermitteln die beiden Geradenpaare, die sich aus der Geraden o und der Tangente $J^{(2)}$ in P bzw. Q zusammensetzen.

Wieviele Geradenpaare der einen und der anderen Art gehören einem Büschel unseres Netzes an? Scheiden wir ein Büschel durch einen beliebigen Punkt X der Ebene aus dem Netze aus, so ist der vierte Grundpunkt des Büschels in dem vierten harmonischen Punkte $\bar{X}$ gegeben, der X bezüglich der beiden Schnittpunkte von XO mit $J^{(2)}$ zugeordnet ist. Von den drei Geradenpaaren des Büschels gehören (XP, XQ) und (XQ, $\bar{X}$P) zur ersten, (PQ, XX) zur zweiten Art. (Die Beantwortung der obigen Frage ergibt sich auch daraus, dass die o-Geradenpaare ein Büschel (o, O) im Netze bilden und somit in jedes andere Büschel ein Element hineinwerfen.) Speziell in den Büscheln, die

durch einen Punkt Y der $J^{(2)}$ aus dem Netze herausgehoben werden, sind beide Arten je einmal vertreten: Die Geraden, die Y mit P und Q verbinden, bilden ein (P, Q)-Geradenpaar, in dem jedoch zwei Geradenpaare vereinigt zu denken sind; das Geradenpaar, das sich aus YO und PQ zusammensetzt, ein solches der zweiten Art.

Die Cayleysche Kurve eines Netzes mit zwei Grundpunkten zerfällt in drei Strahlbüschel, die Büschel um die Punkte O, P und Q.

Besitzt ein Kegelschnittnetz noch einen dritten Grundpunkt R, so setzt sich seine Jacobische Kurve aus den drei Geraden $QR \equiv p$, $RP \equiv q$ und $PQ \equiv r$ zusammen[1]). Die von diesen getragenen Involutionen (P, Q), (Q, R) und (R,P) repräsentieren die involutorische Korrespondenz der konjugierten Punkte. Unter den Büscheln des Netzes sind besonders die drei Geradenpaarbüschel (p, P), (q, Q) und (r, R) bemerkenswert. Die Cayleysche Kurve schliesslich zerfällt in die drei Strahlenbüschel P, Q, R.

11. Zu der zweiten Reihe ein-, zwei- und dreifach spezieller Netze, deren Ausgangspunkt das in No. 5 behandelte Netz $\mathfrak{N}_0$ bildet, führt uns die Betrachtung des dem Kegelschnittnetze felddual gegenüberstehenden Gebildes zweiter Stufe, das wir als Kegelschnittgewebe bezeichnen wollen.

Auch das Gewebe besitzt zwei Kernkurven, die Jacobische Kurve $J_{(3)}$, der beim Netze $J^{(3)}$ dual gegenübersteht, und die Kurve der Schnittpunkte konjugierter Strahlen, eine Kurve 3. O. $C^{(3)}$, dual zu der Cayleyschen Kurve $C_{(3)}$ des Netzes.

Beide Figuren, Netz und Gewebe, können aufs engste mit einander verbunden werden[2]). Geht man nämlich von irgend einem Netze N aus und sucht seine Cayleysche Kurve $C_{(3)}$ mit ihren ∞^1 Paaren konjugierter Tangenten auf, so gehören alle Kegelschnitte, inbezug auf welche die

[1]) Vgl. z. B. Reye, a. a. O. S. 293.

[2]) Vgl. z. B. Reye, a. a. O. S. 278 flg. Vgl. ferner Schröter, die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, § 5.

Strahlen dreier beliebiger — und damit aller — dieser Paare konjugierte Geraden sind, einem Gewebe G an, dessen Jacobische Kurve $C_{(3)}$ ist. Da die Jacobische Kurve $J^{(3)}$ des Netzes N für das Gewebe G die zweite Kernkurve darstellt, so haben wir in N und G zwei Systeme von Kegelschnitten gefunden, in denen die Kernkurven J und C ihre Rollen vertauschen, indem $J^{(3)}$ mit $C^{(3)}$ und $C_{(3)}$ mit $J_{(3)}$ identisch ist. Das Verhältnis der beiden Systeme N und G, deren Elemente von einander verschieden sind, charakterisiert sich also darin, dass die Geraden der Geradenpaare des Netzes konjugierte Geraden für alle Kurven des Gewebes, die Punkte der Punktepaare des Gewebes konjugierte Punkte bezüglich aller Kegelschnitte des Netzes sind, oder umgekehrt, dass konjugierte Geraden bezüglich des Gewebes immer ein Geradenpaar des Netzes und konjugierte Punkte bezüglich des Netzes immer ein Punktepaar des Gewebes darstellen. Zwei Systeme der Art N und G bezeichnet man als apolare, verbundene oder sich stützende Systeme.

Aus der gekennzeichneten Identität der Paare konjugierter Elemente (Punkte oder Geraden) bezüglich des einen von zwei apolaren Systemen mit den ausgearteten Kurven (Punkte- oder Geradenpaare) des anderen folgt, dass unser ausgezeichnetes Netz $\mathfrak{N}_0$, das eine Doppelgerade s enthält, ein Gewebe mit der Grundtangente s stützt. Dual steht dem Netze $\mathfrak{N}_0$ ein Gewebe $\mathfrak{G}_0$ mit einem Doppelpunkt S gegenüber, in dem gleichfalls ein einfach unendliches System von Büschel-Schaaren enthalten ist; die Grundtangentenpaare dieser ∞^1 Büschel-Schaaren bilden die Paare einer Strahleninvolution mit dem Zentrum S, der beim Netze $\mathfrak{N}_0$ dual die Involution der Grundpunktepaare auf s gegenübersteht. Das Strahlbüschel S löst sich von der Jacobischen Kurve $J_{(3)}$ ab; die zwischen dem Strahlenbüschel S und dem Tangentenbüschel des Restkegelschnitts $J_{(2)}$ bestehende doppelt spezielle Projektivität repräsentiert die ausgeartete involutorische Korrespondenz der konjugierten Geraden. Das Gewebe $\mathfrak{G}_0$ stützt sich auf ein Netz mit dem Grundpunkte S.

12. Es liegt nun nahe, die Konstruktion, die zum Aufbau des Netzes $\mathfrak{N}_0$ führt, in geeigneter Weise mit der dualen Konstruktion des Gewebes $\mathfrak{G}_0$ zu kombinieren und so ein Gebilde zweiter Stufe zu konstruieren, das, in sich dual, gleichzeitig Netz und Gewebe[1]) ist. Zu diesem Zwecke wählen wir als Konstituenten eine Doppelgerade s und zwei Geradenpaare mit gemeinsamem Doppelpunkt S oder, was auf dasselbe hinausläuft, zwei Büschel-Schaaren, die dieselbe Berührungssehne s und zugleich denselben Berührungspol S haben.

Es ergibt sich dann ein Kegelschnittsystem mit ∞^1 Büschel-Schaaren sich doppelt berührender Kegelschnitte, deren Grundpunktepaare die Paare einer Involution auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne s und deren Grundtangentenpaare die gepaarten Strahlen einer zu jener perspektiven Strahleninvolution um den gemeinsamen Berührungspol S bilden. Sind T, U die Doppelpunkte der Involution (s), $u = ST$ und $t = SU$ die Doppelstrahlen der Involution (S), so stellt das Dreieck STU ein gemeinsames Polardreieck bzw. -dreiseit aller Kegelschnitte des Systems dar: denn nicht allein sind S und s Pol und Polare bezüglich aller seiner Elemente, sondern, da T ausser zu S auch zu U konjugiert ist, auch T und $SU = t$ und ebenso U und $ST = U$. Das Hinzutreten der beiden Doppelgeraden t und u zur ursprünglichen s bewirkt, dass noch zwei weitere einfach unendliche Systeme von Büschel-Schaaren auftreten; ihre Grundpunktepaare bilden die Involutionen (T, S) und (U, S), ihre Grundtangentenpaare die zu diesen perspektiven Strahleninvolutionen (s, t) und (s, u). Unter den Büscheln unseres Netz-Gewebes sind als bemerkenswert die drei Geradenpaarbüschel (s, t), (t, u) und (u, s), unter seinen Schaaren die drei Punktepaarscharen (S, T), (T, U) und (U, S) hervorzuheben. Konjugiert bezüglich aller Elemente des Systems ist jede Ecke des Dreiecks STU zu jedem Punkte der Gegenseite bzw. jede Seite zu jedem Strahl

[1]) Vgl. z. B. Reye, a. a. O. S. 293.

durch die Gegenecke. Die Jacobische Kurve $J^{(3)} = C^{(3)}$ zerfällt in die drei Geraden s, t, u; die Cayleysche Kurve $J_{(3)} = C_{(3)}$ in die Büschel um die Ecken S, T, U. Schliesslich sei noch bemerkt, dass ein solches in sich duales Netz-Gewebe als Netz ein Gewebe mit drei Grundtangenten s, t, u stützt und als Gewebe auf einem Netze mit drei Grundpunkten S, T, U ruht.

Stehen die Netze $\mathfrak{N}_0$ bezüglich ihrer Spezialität auf derselben Stufe wie die Netze mit einem Grundpunkt, so sind die Netz-Gewebe in der Spezialität den Netzen mit drei Grundpunkten koordiniert, da beider Mannigfaltigkeit ∞^6 beträgt.

13. Als Zwischenstufe zwischen dem Netze $\mathfrak{N}_0$ und dem Netz-Gewebe existiert ein Netz mit zwei Systemen von Büschel-Schaaren, das wie das Netz mit zwei Grundpunkten von der Mannigfaltigkeit ∞^7 ist. Dieses doppelt spezielle Netz entsteht, wenn wir als Konstituenten zwei Doppelgeraden t und u und ein beliebiges Geradenpaar wählen. Sind A, A′ die Schnittpunkte des Geradenpaares mit t, ferner B, B′ diejenigen mit u, schliesslich $\mathfrak{S}$ der Schnittpunkt von t und u, so ist durch $\mathfrak{S}$ als Doppelpunkt und A, A′ als Paar eine Involution auf t, wiederum durch $\mathfrak{S}$ als Doppelpunkt und B, B′ als Paar eine Involution auf u bestimmt. Bezeichnet $\mathfrak{U}$ den zweiten Doppelpunkt der ersten, $\mathfrak{T}$ den der zweiten Involution, so ist sowohl $\mathfrak{T}$ wie $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{S}$ bezüglich der drei Konstituenten und somit bezüglich aller Kegelschnitte des Netzes konjugiert, d. h. $\mathfrak{T}\,\mathfrak{U} = s$ ist bezüglich aller Netzkurven die Polare des Punktes $\mathfrak{S}$. Auf den Geraden t und u, die die Gerade s zur vollen Jacobischen Kurve 3. O. ergänzen, ist die involutorische Korrespondenz der konjugierten Punkte in eine Projektivität zwischen beiden Punktreihen ausgeartet, in der den Punkten $\mathfrak{S}$, A, $\mathfrak{U}$, A′ von t die Punkte $\mathfrak{T}$, B, $\mathfrak{S}$, B′ von u korrespondieren. Die Geradenpaare des Netzes sondern sich in zwei Gruppen: Die einen, deren Doppelpunkte in $\mathfrak{S}$ liegen, gehören dem Geradenpaarbüschel (t, u) an; die Geradenpaare der anderen haben ihre Doppelpunkte auf s, entsprechend

der Tatsache, dass $\mathfrak{S}$ und s bezüglich aller Netzkurven polar sind. Die Cayleysche Kurve des Netzes setzt sich zusammen aus dem Strahlbüschel $\mathfrak{S}$, dem Inbegriff der Verbindungsstrahlen des Punktes $\mathfrak{S}$ mit den ihm konjugierten Punkten von s, und einem Kegelschnitt $C_{(2)}$, dem Erzeugnis der projektiven Punktreihen t und u; der Cayleysche Kegelschnitt berührt t und u in $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{T}$.

Das auf dem Netze mit zwei Doppelgeraden t, u ruhende Gewebe besitzt zwei Grundtangenten, die Geraden t und u.

14. Die Netze mit ein, zwei und drei Grundpunkten auf der einen Seite und die Netze mit ein, zwei und drei Doppelgeraden auf der anderen sind die Haupttypen der ein-, zwei- und dreifach speziellen Netze. Zwischen diesen beiden Reihen stehen noch drei gemischte Systeme, gemischt in dem Sinne genommen, dass sie sowohl Grundpunkte als auch Doppelgeraden besitzen; nämlich ein doppelt spezielles Netz und zwei dreifach spezielle.

Wir beginnen mit dem zweifach speziellen, einem Netze mit einem Grundpunkte und einer Doppelgeraden. Es sei definiert durch die Doppelgerade o und zwei Kegelschnitte, die sich auf o in einem Punkte P begegnen. Bauen wir das Netz aus den drei Konstituenten nach Analogie des Netzes $\mathfrak{N}_0$ auf, so ergibt sich ohne weiteres, dass die Involution der Grundpunktepaare der ∞^1 Büschel-Schaaren auf o parabolisch ist und der Jacobische Kegelschnitt $J^{(2)}$ die Gerade o in P berührt. Die Cayleysche Kurve zerfällt in das Strahlbüschel P und einen Kegelschnitt $C_{(2)}$, der $J^{(2)}$ ausser in P noch in einem zweiten Punkte tangiert. Für das Gewebe, das sich auf unser Netz stützt, wird P als Punkt, der sich selbst konjugiert ist, ein Doppelpunkt und o eine Grundtangente, und so erkennen wir, dass das apolare Gewebe eines Netzes mit einem Grundpunkt und einer Doppelgeraden ihm zugleich dual gegenübersteht.

Ein dreifach spezielles gemischtes System erhalten wir, wenn sich die beiden konstituierenden Kegelschnitte ausser in P noch in einem zweiten Punkte Q der Doppelgeraden o,

die wiederum die dritte Konstituente sei, schneiden. Bezeichnet dann A die auf $PQ \equiv o$ gelegene Ecke des gemeinsamen Polardreiecks der beiden Kegelschnitte, a die Gegenseite, so sind A und a bezüglich der drei Konstituenten und somit in Bezug auf alle Netzkegelschnitte polar. Jedes der (P, Q)-Geradenpaare, deren Doppelpunkte die Gerade a erfüllen, bestimmt mit der Doppelgeraden o eine Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte. Zwischen den (P, Q)-Geradenpaaren und den o-Geradenpaaren, die das Büschel (o, A) bilden, vermittelt die Doppelgerade o; in o sind demnach zwei Doppelgeraden vereinigt zu denken. Dies erhellt auch daraus, dass das Netz mit zwei Grundpunkten und einer Doppelgeraden aus dem Netz mit zwei Doppelgeraden hervorgeht, wenn die beiden Doppelgeraden sich unbegrenzt nähern und schliesslich in einander übergehen. Denn fassen wir die beiden unendlich nahen Doppelgeraden und irgend einen weiteren Kegelschnitt des Netzes als Konstituenten auf, so erkennen wir unmittelbar, dass die Schnittpunkte der dritten Konstituente mit den beiden vereinigten Doppelgeraden gemeinsame Punkte aller Netzelemente werden. Für die Jacobische Kurve des vorliegenden Netzes zählt somit die Gerade o doppelt, während die Gerade a einfach zu rechnen ist; das Geradenpaar (o, a) stellt den Jacobischen Kegelschnitt des Netzes dar. Seine Cayleysche Kurve setzt sich aus den drei Strahlbüscheln P, Q, A zusammen.

Die zweite Art der dreifach speziellen gemischten Systeme sind die Netze mit einem Grundpunkt und zwei Doppelgeraden. Wir lassen ein solches Netz aus einem Geradenpaar (x, y) und den beiden Doppelgeraden t und u, die sich auf x in P schneiden, entstehen und folgern, da die drei Konstituenten in P auf x zwei vereinigte Schnitte haben, dass sämtliche Kegelschnitte des Netzes die Gerade x in P berühren. Ebenso wie im vorigen Falle die Doppelgerade o als die Vereinigung zweier unendlich naher Doppelgeraden anzusehen ist, tritt also hier zu dem Grundpunkte P noch ein zweiter unendlich benachbarter Q. In der Tat gelangen

wir zu einem Netze der vorliegenden Art, wenn wir von einem Netze mit zwei Grundpunkten P, Q ausgehen und diese sich unbegrenzt nähern lassen. Denn ist A, $\mathfrak{A}$ das Paar konjugierter Punkte, das neben den Grundpunkten P, Q das Netz bestimmt, so gehen bei unbegrenzter Annäherung von P und Q die beiden Geradenpaare (PA, QA), (P$\mathfrak{A}$, Q$\mathfrak{A}$) des Netzes in Doppelgeraden über.

Da alle Netzkurven die Gerade x in P = Q berühren, so ist jedes Büschel des Netzes von der Art $\mathfrak{B}$, d. h. von seinen drei Geradenpaaren haben sich immer zwei in dem Geradenpaar, dessen Doppelpunkt P ist, vereinigt. Daraus folgt wiederum, dass das Geradenpaarbüschel (t, u) doppelt zu zählen ist. Die zweiten Geradenpaare der Netzbüschel bilden das Büschel [x, (y, z)], wo z der dem x bezüglich t, u zugeordnete vierte harmonische Strahl ist. Die Korrespondenz der konjugierten Punkte zerfällt in die von x getragene parabolische Involution (P) und in die perspektiven Punktreihen t und u, deren Perspektivitätszentrum im Punkte (y, z) liegt. Die Jacobische Kurve des Netzes setzt sich aus den drei in P konkurrierenden Geraden t, u und x zusammen, die Cayleysche Kurve aus den Strahlbüscheln (y, z) und P, von denen letzteres doppelt zu rechnen ist. Auf unserem Netze ruht ein Gewebe mit zwei Grundtangenten und einem Doppelpunkte, mit dem ein zweiter unendlich benachbarter vereinigt zu denken ist. Bezüglich des vorigen Netzes sei jetzt nachgeholt, dass das zu ihm apolare Gewebe zwei Doppelpunkte und eine Grundtangente besitzt, die als die Vereinigung zweier unendlich naher Grundtangenten anzusehen ist.

15. Mit den bisher behandelten neun Typen ist die Zahl der Abarten der ein-, zwei- und dreifach speziellen Netze erschöpft. Die folgende Tabelle gibt eine Uebersicht über diese neun Netze, ihre dualen und ihre apolaren Gewebe. Die erste der in Klammern zu dem Gattungszeichen $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{G}$ hinzugefügten Ziffern bezeichnet die Zahl der Grundpunkte bzw. Grundtangenten, die zweite die Zahl der Doppelgeraden bzw. Doppelpunkte des jeweiligen Gebildes,

so dass also z. B. das Netz $\mathfrak{N}_{(0,1)}$ mit unserem bisherigen $\mathfrak{N}_0$ identisch ist. Eine 2 weist auf zwei unendlich benachbarte Grund- bzw. Doppelelemente hin.

Mannigfaltigkeit	Netz	Duales Gewebe	Apolares Gewebe
∞^8	$\mathfrak{N}_{(1,0)}$ $\mathfrak{N}_{(0,1)}$	$\mathfrak{G}_{(1,0)}$ $\mathfrak{G}_{(0,1)}$	$\mathfrak{G}_{(0,1)}$ $\mathfrak{G}_{(1,0)}$
∞^7	$\mathfrak{N}_{(2,0)}$ $\mathfrak{N}_{(1,1)}$ $\mathfrak{N}_{(0,2)}$	$\mathfrak{G}_{(2,0)}$ $\mathfrak{G}_{(1,1)}$ $\mathfrak{G}_{(0,2)}$	$\mathfrak{G}_{(0,2)}$ $\mathfrak{G}_{(1,1)}$ $\mathfrak{G}_{(2,0)}$
∞^6	$\mathfrak{N}_{(3,0)}$ $\mathfrak{N}_{(2,1)} = \mathfrak{N}_{(2,\overline{2})}$ $\mathfrak{N}_{(1,2)} = \mathfrak{N}_{(\overline{2},2)}$ $\mathfrak{N}_{(0,3)}$	$\mathfrak{G}_{(3,0)}$ $\mathfrak{G}_{(2,1)} = \mathfrak{G}_{(2,\overline{2})}$ $\mathfrak{G}_{(1,2)} = \mathfrak{G}_{(\overline{2},2)}$ $\mathfrak{G}_{(0,3)} = \mathfrak{N}_{(0,3)}$	$\mathfrak{G}_{(0,3)}$ $\mathfrak{G}_{(1,2)} = \mathfrak{G}_{(2,2)}$ $\mathfrak{G}_{(2,1)} = \mathfrak{G}_{(2,\overline{2})}$ $\mathfrak{G}_{(3,0)}$

16. Zum Schluss wollen wir kurz einige noch speziellere Netze betrachten, deren Kenntnis im weiteren Verfolge unserer Untersuchungen vorausgesetzt wird. Lassen wir in einem Netze $\mathfrak{N}_{(3,0)}$ zwei der Grundpunkte, etwa Q und R, sich unbegrenzt nähern, so erhalten wir ein Netz, dessen Elemente die Gerade QR = p in Q = R berühren und ausserdem noch einen Punkt P gemeinsam haben. Von den Geradenpaarbüscheln ist das Büschel (q, Q) = (r, R) doppelt, das Büschel (p, P) einfach zu zählen.

Fallen entsprechend in einem Netze $\mathfrak{N}_{(0,3)}$ (No. 12) zwei Doppelgeraden, etwa t und u, zusammen, so zwar dass S der Grenzschnittpunkt von t, u ist, so entsteht ein Netz von Kegelschnitten, die die Gerade t = u im Punkte U = T berühren, und bezüglich deren s die Polare des Punktes S = (t, u) darstellt. Wiederum zählt das eine Geradenpaarbüschel, (s, t) (s, u), doppelt, das andere, (t, S) = (u, S), einfach. Die Mannigfaltigkeit beider Netzarten beträgt ∞^5; wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{N}_{(4)}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{N}_{(4)}^{\mathrm{II}}$.

Auch auf der zweiten Stufe gibt es Systeme, die nur Geradenpaare enthalten, und zwar unterscheiden wir wiederum

zwei Gattungen. Haben die drei ein Netz konstituierenden Geradenpaare eine Gerade x gemeinsam, so setzt sich jedes seiner Elemente aus der Geraden x und irgend einem zweiten Strahl der Ebene zusammen. Zwei beliebige Punkte Y, Z der Ebene bestimmen ein Netzelement, das Geradenpaar (x, YZ). Die Büschel des Netzes sind sämtlich Geradenpaarbüschel erster Art. Wir bezeichnen es durch $\mathfrak{N}(x)$.

Zu der zweiten Gattung der Geradenpaarnetze gelangen wir, indem wir als Konstituenten drei Geradenpaare mit demselben Doppelpunkt X annehmen. Das so definierte Netz stellt sich dar als die Gesamtheit aller Geradenpaare, deren Doppelpunkt in X liegt. Auch hier wird, der allgemeinen Eigenschaft der Netze entsprechend, durch 2 Punkte Y, Z der Ebene ein Element, das Geradenpaar (XY, XZ), ausgeschieden. Die Büschel eines solchen Netzes, das wir durch $\mathfrak{N}(X)$ bezeichnen wollen, sind sämtlich Geradenpaarbüschel zweiter Art. Die Mannigfaltigkeit beider Netzarten beträgt ∞^2.

III. Eine Polarkorrelation im Kegelschnittgebüsche mit zwei Grundpunkten.

17. Wir gehen nunmehr zu einem speciellen linearen System dritter Stufe über, dem Kegelschnittgebüsche mit zwei Grundpunkten P und Q, definiert als der Inbegriff aller Kegelschnitte, welche durch P und Q hindurchgehen. Unter den ∞^2 Geradenpaaren unseres Gebüsches unterscheiden wir wiederum zwei verschiedene Arten: Die (PQ)-Geradenpaare, gebildet durch die Strahlenpaare, die von den Punkten der Ebene nach P und Q hingehen, und die o-Geradenpaare, die sich aus der Geraden o und irgend einer Geraden der Ebene zusammensetzen; letztere bilden das Geradenpaarnetz $\mathfrak{N}_{(o)}$. Zwischen beiden Arten vermitteln die Elemente der Geradenpaarbüschel (o, P) und (o, Q). Im Gebüsche gibt es ∞^4 Büschel, entsprechend den ∞^4 Punktepaaren X, $\bar{X}$, in die man die Gesamtheit der Punkte der Ebene gruppieren kann, ferner ∞^3 Netze, sämtlich von der doppelt speziellen Art $\mathfrak{N}_{(o,o)}$.

Jedem der ∞^3 Netze unseres Gebüsches gehört eine Jacobische Kurve zu, die in die Gerade o und einen gewissen durch P und Q gehenden Kegelschnitt zerfällt. Legen wir ein Netz N etwa durch ein Punktepaar A, $\mathfrak{A}$ fest, mit der Massgabe, dass A, $\mathfrak{A}$ inbezug auf alle Kurven des Netzes konjugiert sein sollen, so ist der Jacobische Kegelschnitt dieses Netzes (über-) bestimmt durch die vier Punkte P, Q, A, $\mathfrak{A}$ und den Pol O von PQ, den Schnittpunkt von A$\mathfrak{A}$ mit der Verbindungsgeraden der Punkte $X = (AP, \mathfrak{A}Q)$ und $\overline{X} = (AQ, \mathfrak{A}P)$.

Ist ein Netz N durch drei seiner Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 gegeben, die nicht demselben Büschel angehören, so sind von seinem Jacobischen Kegelschnitt unmittelbar 8 Punkte bekannt, nämlich ausser P und Q diejenigen Ecken jedes der Polardreiecke der drei Büschel (K_1, K_2), (K_2, K_3) und (K_3, K_1), welche nicht auf o liegen.

Der Jacobische Kegelschnitt jedes Netzes N unseres Gebüsches ist, da er durch P und Q geht, selbst ein Kegelschnitt K des Gebüsches, steht aber im allgemeinen ausserhalb des Netzes N, dessen Jacobischen Kegelschnitt er darstellt.

Fassen wir umgekehrt einen beliebigen Kegelschnitt K des Gebüsches auf, so gibt es genau ein Netz N im Gebüsche, dessen Jacobischer Kegelschnitt K ist. N ist bestimmt durch irgend drei Geradenpaare, deren Doppelpunkte auf K liegen; denn der Jacobische Kegelschnitt des so definierten Netzes hat mit K ausser P und Q noch die Doppelpunkte jener drei Geradenpaare gemein, ist also mit K identisch.

Besonders interessieren uns diejenigen Netze, deren Jacobische Kegelschnitte in Geradenpaare der einen oder der anderen Art ausarten. Aus den Darlegungen von No. 10 und 14 geht nun hervor, dass die dreifach speziellen Netze $\mathfrak{N}_{(3,0)}$ und $\mathfrak{N}_{(2,1)}$ $\mathfrak{N}_{(2,2)}$, die in unserem Gebüsche je in doppelt unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden sind, zu Jacobischen Kegelschnitten führen, die in (P, Q)- bzw. o-Geradenpaare zerfallen. Liegt ein (P, Q)-Geraden-

paar (RP, RQ) vor, so stellt es den Jacobischen Kegelschnitt des Netzes dar, das R als dritten Grundpunkt besitzt; und ist ein o-Geradenpaar (o, a) gegeben, so besteht das Netz, dessen Jacobisches Geradenpaar es ist, aus allen den Kegelschnitten, bezüglich deren a die Polare des dem Punkte (o, a) in der Involution (P, Q) gepaarten Punktes A ist. Während aber ein (P, Q)-Geradenpaar ersichtlich als Element dem Netze angehört, das es als Jacobisches Geradenpaar bestimmt, steht ein o-Geradenpaar ausserhalb des zugehörigen Netzes, da die Polare von A bezüglich (o, a) nicht a, sondern o ist. Die Uebergangsstufen zwischen den Geradenpaaren erster und zweiter Art, die Elemente der Büschel (o, P) und (o, Q), sind die Jacobischen Geradenpaare der Netze $\mathfrak{N}_{(4)}^{1}$, deren Kurven sich in P bzw. Q berühren. Die Doppelgerade o schliesslich stellt das Jacobische Geradenpaar des Geradenpaarnetzes $\mathfrak{N}(o)$ dar.

Zusammenfassend können wir also sagen: Jedes Netz N unseres Gebüsches besitzt einen bestimmten Jacobischen Kegelschnitt K im Gebüsche, und umgekehrt ist jeder Kegelschnitt K des Gebüsches für ein Netz N Jacobischer Kegelschnitt. Der allgemeine Fall ist der, dass ein Kegelschnitt K nicht dem Netze N, dessen Jacobischen Kegelschnitt er darstellt, selbst als Element angehört; eine Ausnahme hiervon bilden die (P, Q)-Geradenpaare, deren zugehörige Netze die Netze mit drei Grundpunkten sind.

18. Indem wir nunmehr einem Kegelschnitte K des Gebüsches dasjenige Netz N, dessen Jacobischer Kegelschnitt K ist, und umgekehrt einem Netze N seinen Jacobischen Kegelschnitt K entsprechen lassen, erhalten wir eine ein-eindeutige Verwandtschaft in unserem Gebüsche. Um die Art dieser Verwandtschaft festzustellen, bilden wir sie in den Punktraum ab, indem wir zwischen dem Gebüsche als linearem System dritter Stufe und dem Punktraum eine Kollineation herstellen, in der den Kegelschnitten, Büscheln und Netzen des Gebüsches die Punkte, Geraden und Ebenen korrespondieren. Vermöge der Kollineation überträgt sich die ein-eindeutige Beziehung zwischen den Kegel-

schnitten K und den Netzen N des Gebüsches auf die Punkte $\mathfrak{K}$ und die Ebenen $\mathfrak{N}$ des Raumes in der Weise, dass einem Punkte $\mathfrak{K}$ diejenige Ebene $\mathfrak{N}$ eindeutig zugeordnet ist, deren in der Kollineation entsprechendes Netz N zu dem Kegelschnitte K gehört, der sich in jenem Punkte $\mathfrak{K}$ abbildet, und ferner dass einer Ebene $\mathfrak{N}$ derjenige Punkt $\mathfrak{K}$ zugeordnet ist, dessen Abbild K im Gebüsche der Jacobische Kegelschnitt des jener Ebene $\mathfrak{N}$ korrespondierenden Netzes N ist. Bezüglich der so entstandenen ein-eindeutigen Verwandtschaft im Punktraume lässt sich zunächst nachweisen, dass sie eine Korrelation ist, d. h. dass sich Punkt und entsprechende Ebene und umgekehrt Ebene und korrespondierender Punkt gleichzeitig linear bewegen. Für unser Gebüsche ist infolgedessen zu zeigen, dass, wenn irgend ein Kegelschnitt K des Gebüsches ein Büschel beschreibt, das ihm zugeordnete Netz N sich um ein Büschel des Gebüsches dreht, oder umgekehrt. Sind X, $\bar{X}$ der dritte und der vierte — der Einfachheit halber reelle — Grundpunkt des von K durchlaufenen Büschels, so gehören jedem der Netze N, die den Büschelkegelschnitten K zugeordnet sind, die beiden (P, Q)-Geradenpaare (XP, XQ) und ($\bar{X}$P, XQ) an, und somit das ganze von diesen bestimmte Büschel, dessen ergänzende Grundpunkte das dritte Gegeneckenpaar Y, $\bar{Y}$ des durch die Geraden XP, XQ, $\bar{X}$Q gebildeten vollständigen Vierseits darstellt. Die beiden Büschel (P, Q, X, $\bar{X}$) und (P, Q, Y, $\bar{Y}$) sind sekundäre einander (zunächst nur in einem Sinne) entsprechende Gebilde.

Damit ist unsere ein-eindeutige Verwandtschaft als Korrelation erkannt.

19. Der weiteren Untersuchung schicken wir folgenden Hülfssatz vorauf: Gehört von zwei Kegelschnitten K, K′ unseres Gebüsches der eine, K′, demjenigen Netze N an, dessen Jacobischer Kegelschnitt K ist, so ist auch umgekehrt K ein Element des Netzes N′, dessen Jacobischen Kegelschnitt K′ darstellt. Denn: Sind O und O′ die Pole von $PQ = o$ bezüglich der Kegelschnitte K und K′ und A, $\mathfrak{A}$ bzw. A′ $\mathfrak{A}'$ die Schnittpunkte von OO′ mit ihnen, so stellen

A, $\mathfrak{A}$ ein Paar konjugierter Punkte bezüglich K′ dar, d. h. der Punktwurf (A $\mathfrak{A}$ A′ $\mathfrak{A}$′) ist harmonisch. Fassen wir nun umgekehrt K′ als Jacobischen Kegelschnitt auf, so ist A′, $\mathfrak{A}$′ ein Paar der von ihm getragenen krummen Involution, und da die Punkte A′, $\mathfrak{A}$′ bezüglich K konjugiert sind, so gehört K dem Netze N′ an, das K′ in unserer Verwandtschaft korrespondiert.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir zunächst noch besonders dartun, dass den Punkten $\mathfrak{K}$′ einer Ebene die Ebenen $\mathfrak{N}$′ eines Bündels korrespondieren. Denn beschreibt ein Kegelschnitt K′ ein Netz N im Gebüsche, so erhellt unmittelbar, dass der Jacobische Kegelschnitt K dieses Netzes allen den Netzen N′, die den Elementen K′ von N zugeordnet sind, gemeinsam ist, dass also das zu K′ gehörige Netz N′ gleichsam ein Bündel mit dem Scheitel K beschreibt. Dem Scheitelkegelschnitt K korrespondiert, wenn man ihn dem zweiten Kegelschnittraume zurechnet, im ersten das Netz N.

Aus dem oben zitierten Satze geht aber vor allen Dingen hervor, dass sich die Elemente $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ unserer räumlichen Korrelation auch involutorisch entsprechen. Denn ist K ein Kegelschnitt des Gebüsches, N das ihm zugeordnete Netz und K′ irgend ein Element des Netzes N, so geht das K′ korrespondierende Netz N′ durch K, da eben K und K′ in der gekennzeichneten Beziehung zu einander stehen. Speziell das involutorische Entsprechen der Büschel (P, Q, X, $\bar{X}$) und (P, Q, Y, $\bar{Y}$) der beiden Räume folgt auch daraus, dass die ergänzenden Grundpunktepaare X, $\bar{X}$ und Y, $\bar{Y}$ Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits mit dem festliegenden Gegeneckenpaar P, Q sind und als solche in gewisser involutorischer Zuordnung zu einander stehen.

Unsere räumliche Verwandtschaft kennzeichnet sich somit als involutorische Korrelation und zwar als Polarität bezüglich einer Fläche zweiten Grades, da das Kriterium des Nullsystems, die durchgängige Inzidenz gepaarter Elemente, nicht zutrifft; und als Polarkorrelation können wir auch die Verwandtschaft im Kegelschnittraume ansprechen.

20. Den Punkten der Basisfläche $\Phi^{(2)}$ der räumlichen Polarkorrelation, d. i. den Punkten des Raumes, die mit ihren Polarebenen inzidieren, entsprechen in unserem Kegelschnittgebüsche die (P, Q)-Geradenpaare, da sie ihren Polarnetzen als Elemente angehören; diese selbst, die Netze mit drei Grundpunkten, stellen die Abbilder der Tangentialebenen von $\Phi^{(2)}$ im Gebüsche dar.

Sind X, $\bar{X}$ die ergänzenden Grundpunkte eines Büschels im Gebüsche, so korrespondieren die beiden (P, Q)-Geradenpaare (XP, $\bar{X}$Q) und ($\bar{X}$P, XQ) den Schnittpunkten der jenem Büschel im Raume entsprechenden Geraden mit $\Phi^{(2)}$. Sind X,X unendlich benachbart, so ist das räumliche Abbild des betr. Büschels eine Tangente von $\Phi^{(2)}$; das Geradenpaar (XP, $\bar{X}$Q) $\equiv$ (XP, XQ) korrespondiert dem Berührungspunkt, das Netz (P, Q, X) der Tangentialebene in diesem Punkte. Wählen wir die beiden ergänzenden Grundpunkte X, $\bar{X}$ eines Büschels so, dass sie mit einem der Gebüschgrundpunkte, etwa P, in gerader Linie liegen, so erhalten wir ein Büschel bestehend aus lauter (P, Q)-Geradenpaaren; jedes Element des Büschels setzt sich aus der Geraden P$X\bar{X}$ und irgend einem Strahl durch Q zusammen. Diesen speziellen Büscheln entsprechen im Raume die Erzeugenden der Basisfläche, und zwar je nachdem X, X mit P oder mit Q allineiert sind, die Geraden der einen oder der anderen Schaar, der q-Schaar oder der p-Schaar. Liegen X, $\bar{X}$ mit P, Y, $\bar{Y}$ mit Q in gerader Linie, so ist das gemeinsame Geradenpaar ($X\bar{X}$P, $Y\bar{Y}$Q) der beiden Büschel (X, X, P, Q) und (Y, Y, P, Q) das Abbild des Schnittpunktes der ihnen korrespondierenden Erzeugenden q und p, und das Netz, dessen dritter Grundpunkt der Schnittpunkt von $X\bar{X}$P und $Y\bar{Y}$Q ist, das Abbild der zugehörigen Tangentialebene (p, q). Die beiden ausgezeichneten Büschel (o, P) und (o, Q) bilden sich in zwei ausgezeichnete Erzeugende der p- und q-Schaar ab, die wir mit p_0 und q_0 bezeichnen wollen. Ihr Schnittpunkt Ω entspricht der Doppelgeraden o, dem gemeinsamen Element jener beiden Büschel; die Tangentialebene ω in Ω ist in der Kollineation dem Netze $\mathfrak{N}_{(o)}$ der o-Geradenpaare zugeordnet.

Den Ecken eines Polartetraeders der Basisfläche entsprechen im Gebüsche vier Kegelschnitte von der Art, dass irgend einer von ihnen der Jacobische Kegelschnitt des Netzes ist, das durch die drei anderen bestimmt wird[1]); dual korrespondieren den Ebenen eines Polartetraeders im Gebüsche vier Netze, die in der eigentümlichen Beziehung zu einander stehen, dass das gemeinsame Element dreier von ihnen der Jacobische Kegelschnitt des jeweilig vierten Netzes ist.

Zum Schluss werde noch die Frage der Abhängigkeit der Art der Basisfläche $\Phi^{(2)}$ von der Realität der Punkte P und Q untersucht. Sind P, Q reell, — wie wir bisher stillschweigend vorausgesetzt haben — so sind auch die (P, Q)-Geradenpaare und die Büschel, die nur solche enthalten, vollkommen reell; da durch die Kollineation immer gleichartige, d. i. reelle bzw. imaginäre, Elemente einander zugeordnet werden, so charakterisiert sich in diesem Falle die Basisfläche als hyperbolische. Ist dagegen die Involution (P, Q) elliptisch, so sind die (P, Q)-Geradenpaare imaginär mit reellem Doppelpunkt und reeller Gleichung; in den (P, Q)-Geradenpaarbüscheln besitzt aber immer nur ein Element reellen Doppelpunkt, und das hat zur Folge, dass $\Phi^{(2)}$ elliptisch wird. Fallen schliesslich P und Q zusammen, so bilden die (P, Q)-Geradenpaare, d. i. hier der Inbegriff der Geradenpaare, deren Doppelpunkte in $P = Q$ liegen, ein Netz $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{N}(Q)$. Die Basisfläche artet somit in eine Ebene aus, die aber doppelt gezählt werden muss; denn in jedem Büschel des Gebüsches haben sich von den Geradenpaaren zwei in dem Geradenpaar, dessen Doppelpunkt $P = Q$ ist, vereinigt.

21. Aus der kollinearen Beziehung zwischen den (P, Q)-Geradenpaaren unseres Gebüsches in der Ebene σ und den Punkten der Basisfläche $\Phi^{(2)}$ geht eine — allerdings

[1]) Ein spezieller Fall vier solcher Kegelschnitte sind vier Kreise, von denen jeder die anderen drei rechtwinklig schneidet; die Mittelpunkte je dreier Kreise bilden ein Dreieck, dessen Höhenpunkt das Zentrum des vierten ist.

nicht mehr ausnahmslos eindeutige — Verwandtschaft zwischen den Punkten von σ und $\Phi^{(2)}$ hervor, indem jedem Punkte von σ der Punkt $\mathfrak{R}$ von $\Phi^{(2)}$ zugeordnet erscheint, der in der Kollineation dem Geradenpaar (RP, RQ) entspricht, und umgekehrt einem Punkte $\mathfrak{R}$ von $\Phi^{(2)}$ der Doppelpunkt R des kollinear zugeordneten Geradenpaares korrespondiert. Den sämtlichen Punkten von o ist der Punkt Ω auf $\Phi^{(2)}$ zugeordnet, da immer, wenn R mit o inzidiert, das Geradenpaar (RP, RQ) in die Doppelgerade o übergeht. Ist demnach Ω für die Basisfläche ein Haupt- oder Fundamentalpunkt, so geht andrerseits auf σ die Eindeutigkeit verloren, sobald R in P oder in Q hineinrückt. Denn da P und Q die gemeinsamen Doppelpunkte der Elemente der beiden Geradenpaarbüschel (o, P) bzw. (o, Q) sind, so entsprechen ihnen die einzelnen Punkte der beiden Erzeugenden p_0 bzw. q_0; mit der Art der Annäherung an P bzw. Q variiert der korrespondierende Punkt so zwar, dass jeder Richtung eindeutig ein Punkt zugeordnet ist.

Beschreibt R in σ einen Kegelschnitt K des Gebüsches, so gehören alle Geradenpaare (RP, RQ) dem Netze N an, dessen Jacobischer Kegelschnitt K ist. Den Punkten R von K entsprechen somit die Punkte $\mathfrak{R}$ der Schnittkurve k der Basisfläche mit der N in der Kollineation zugeordneten Ebene $\mathfrak{R}$. Die Punkte, in denen k über p_0 und q_0 hinwegläuft, korrespondieren in der Kollineation den beiden Geradenpaaren, die sich aus o und der Tangente von K in P bzw. Q zusammensetzen. Den ∞^3 Kegelschnitten K des Gebüsches entsprechen demnach die ∞^3 ebenen Schnitte k der Basisfläche. Ist K im besonderen ein (P, Q)-Geradenpaar, so korrespondiert ihm gleichfalls ein Geradenpaar auf $\Phi^{(2)}$, und zwar dem Bestandteil RP eine Erzeugende aus der q-Schaar, der Geraden RQ eine solche aus der p-Schaar.

Es sei nun $C^{(n)}$ eine Kurve n^{ter} Ordnung in σ. $C^{(n)}$ hat dann mit einem beliebigen Kegelschnitt K des Gebüsches 2n Schnittpunkte R, denen auf dem K korrespondierenden ebenen Schnitt k von $\Phi^{(2)}$ ebensoviele Punkte $\mathfrak{R}$ entsprechen. Die der $C^{(n)}$ auf der Basisfläche zugeordnete Raumkurve be-

gegnet somit dem beliebigen ebenen Schnitt k in 2n Punkten, ist also von der Ordnung 2n und hat, entsprechend den n Schnittpunkten von $C^{(n)}$ mit der Geraden o, Ω zum n-fachen Punkt. Sind speziell P und Q n_p- bzw. n_q-fache Punkte der $C^{(n)}$, und ist n_o die Anzahl der Punkte, in denen $C^{(n)}$ der Geraden o ausserdem begegnet, wo also $n_o + n_p + n_q = n$, so löst sich von der korrespondierenden Raumkurve die Gerade p_o n_p-fach, die Gerade q_o n_q-fach ab, und als eigentliches Abbild jener speziellen $C^{(n)}$ bleibt eine Raumkurve von der Ordnung $2n - (n_p + n_q) = n + n_o$, die über p_o bzw. q_o n_p- bzw. n_q-mal hinwegläuft, und für die Ω einen n_o-fachen Punkt darstellt. Unter den Schnittpunkten der Ebene ω mit dieser Raumkurve zählt Ω selbst $2n_o$-fach, weil ω die Tangenten aller n_o durch Ω gehenden Zweige aufnimmt; insgesamt ergibt sich demnach mit den n_p bzw. n_q Punkten, in denen die Raumkurve den Erzeugenden p_o bzw. q_o begegnet, die Zahl $2n_o + n_p + n_q = n + n_o$.

Ist im ganz speziellen Falle n_o gleich null, so ist die Raumkurve selbst von der Ordnung n und geht überhaupt nicht durch Ω. Für $n = 2$, $n_p = n_q = 1$ ergibt sich der Fall des Gebüschkegelschnitts K, von dem die Betrachtung ausgegangen ist. Einem beliebigen Kegelschnitt in σ dagegen korrespondiert auf $\Phi^{(2)}$ eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art mit dem Doppelpunkt Ω.

Zum Schluss behandeln wir bezüglich der Verwandtschaft zwischen den Punkten von σ und $\Phi^{(2)}$ die Frage, was für Systeme von ebenen Schnitten der Basisfläche den Büscheln und Netzen unseres Gebüsches entsprechen. Sind X, X die ergänzenden Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten K des Gebüsches, so gehen die korrespondierenden Kegelschnitte k sämtlich durch die den X, X in unserer Verwandtschaft zugeordneten Punkte $\mathfrak{X}$, $\bar{\mathfrak{X}}$ auf $\Phi^{(2)}$, sind also die Schnitte des Ebenenbüschels $(\mathfrak{X}, \bar{\mathfrak{X}})$.

Ist ferner N′ ein Netz von Kegelschnitten K des Gebüsches, so bilden die den Netzen N, deren Jacobische Kegelschnitte die Netzkegelschnitte K sind, kollinear zugeordneten Ebenen $\mathfrak{N}$ ein Bündel, dessen Scheitel in der

Kollineation dem Jacobischen Kegelschnitt K′ des Netzes N′ entspricht. Von den Ebenen $\mathfrak{N}$ dieses Bündels werden die den Netzkegelschnitten K korrespondierenden Kegelschnitte k eingeschnitten. Besitzt das Netz N′ im besonderen einen dritten Grundpunkt R, so gehen die ebenen Schnitte k durch den R auf $\Phi^{(2)}$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{R}$, der Bündelscheitel liegt auf der Basisfläche selbst.

Aus den hervorgehobenen Momenten erhellt, dass die Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene σ und der Fläche $\Phi^{(2)}$ in ihren Eigenschaften mit der Beziehung übereinstimmt, die sich ergibt, wenn man die Punkte von $\Phi^{(2)}$ aus einem ihrer Punkte Ω auf σ — oder umgekehrt — projiziert und dann die Perspektivität durch Veränderung der gegenseitigen Lage der beiden Trägerflächen aufhebt.

IV. Die kollineare Beziehung zwischen den linearen Kegelschnittsystemen 2. und 3. Stufe und dem Punktfelde bzw. dem Punktraume.

22. Der in Kapitel III ausgeführte Gedanke, die Elemente des speziellen Kegelschnittgebüsches (P, Q) kollinear auf den Punktraum zu beziehen und das dabei auftretende Basisgebilde zu betrachten, ist einer Verallgemeinerung in doppelter Hinsicht fähig. Einmal brauchen wir uns nicht auf ein so spezielles Gebüsche zu beschränken, sondern können den nämlichen Gedanken auch für das allgemeine Kegelschnittgebüsche und für andere spezielle Gebüsche durchführen. Andrerseits sind wir aber auch in der Lage, aus dem dreidimensionalen Raum in den zweidimensionalen hinabzusteigen und analoge Betrachtungen für die allgemeinen und die speziellen Kegelschnittnetze anzustellen.

Indem wir so die linearen Kegelschnittsysteme 2. und 3. Stufe in der Ebene bzw. im Raume abbilden, gewinnen wir die Möglichkeit, auf Grund ihrer uns bekannten Eigenschaften die auftretende Abbildungskurve bzw.-fläche zu studieren und auch umgekehrt aus Eigenschaften der letzteren Rückschlüsse auf die linearen Systeme zu machen.

23. Von der Betrachtung im zweidimensionalen Gebiet als der natürlichen Vorstufe gehen wir aus. Es liege in der Ebene σ ein allgemeines Kegelschnittnetz N vor, dessen Elemente kollinear auf die Punkte einer Ebene σ' bezogen seien. Wir fragen nach dem Ort der Punkte, die den ∞^1 Geradenpaaren des Netzes in der Ebene σ' entsprechen, und zwar zunächst nach der Ordnung der Kurve. Ist B irgend ein Büschel des Netzes, so korrespondiert ihm vermittelst der Kollineation eine Gerade g in σ'; den drei Geradenpaaren von B entsprechen dabei die Punkte, in denen g der Kurve begegnet. Sie ist somit eine Kurve dritter Ordnung, die wir durch $\Gamma^{(3)}$ bezeichnen wollen. Die Büschel $\mathfrak{B}$ des Netzes, deren sämtliche Elemente sich je in einem Punkte berühren, bilden sich in die Tangenten der $\Gamma^{(3)}$ ab, da sich in einem solchen Büschel zwei der Geradenpaare vereinigt haben. Ein beliebiger Netzkegelschnitt K gehört, wie in No. 1 bewiesen, gerade 6 solchen Büscheln $\mathfrak{B}$ an; von dem K kollinear korrespondierenden Punkte von σ' gehen demnach 6 Tangenten an die $\Gamma^{(3)}$. Die Abbildungskurve ist also ordnungsallgemein. Wir erkennen direkt ihre 9 Wendetangenten. In den 9 ausgezeichneten Büscheln $\mathfrak{B}_0$, deren Elemente sich je dreipunktig berühren, haben sich alle drei Geradenpaare je in einem Geradenpaare (r_0, p_0) vereinigt; ihnen entsprechen somit die Wendetangenten der $\Gamma^{(3)}$ und den 9 Geradenpaaren (r_0, p_0) die Wendepunkte. Die spezielle Lage der 9 Wendepunkte der $\Gamma^{(3)}$ gibt sich im Netze N darin kund, dass das Büschel, das durch zwei der ausgezeichneten Geradenpaare (r_0, p_0) bestimmt ist, immer noch ein drittes Geradenpaar dieser Art enthält (No. 4).

Ersetzen wir in der eindeutigen Beziehung zwischen den Geradenpaaren des Netzes N und den Punkten der $\Gamma^{(3)}$ die Geradenpaare durch ihre Doppelpunkte, so erhalten wir eine eindeutige Zuordnung der Punkte der Jacobischen Kurve $J^{(3)}$ des Netzes und der Abbildungskurve $\Gamma^{(3)}$ in σ'; $J^{(3)}$ und $\Gamma^{(3)}$ haben demnach das nämliche Geschlecht. Konjugierten Punkten P und Q auf $J^{(3)}$ entsprechen wiederum konjugierte Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ auf $\Gamma^{(3)}$. Denn die beiden Büschel $\mathfrak{B}$,

deren Kegelschnitte einander in P bzw. Q berühren, haben das Geradenpaar gemeinsam, dessen einer Bestandteil die Gerade P Q ist (No. 1); die ihnen korrespondierenden Tangenten schneiden sich somit auf $\Gamma^{(3)}$, d. h. ihre Berührungspunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ besitzen den nämlichen Tangentialpunkt. Ist insonderheit P_0 ein Berührungspunkt der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve des Netzes N, Q_0 der zugehörige Wendepunkt, so ist von den korrespondierenden Punkten $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{Q}_0$ ersterer ein Wendepunkt der $\Gamma^{(3)}$.

24. Ist das Kegelschnittnetz einfach speziell mit einem Grundpunkte P, seine Jacobische Kurve also eine Kurve 3. O. mit einem Doppelpunkte in P, so verlangt die Gleichheit der Geschlechter, dass auch $\Gamma^{(3)}$ einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ besitzt. Er entspricht in der Kollineation dem Geradenpaar, das sich aus den beiden von P an den Cayleyschen Kegelschnitt $C_{(2)}$ des Netzes gelegten Tangenten zusammensetzt (No. 10); denn jedes Büschel, das dieses Geradenpaar enthält, ist von der Art $\mathfrak{B}$, jede durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade von σ' hat also mit der Abbildungskurve in $\mathfrak{P}$ zwei vereinigte Schnitte. Die beiden Büschel, deren Elemente sich in P je dreipunktig berühren, bilden sich in die Tangenten des Doppelpunktes $\mathfrak{P}$ von $\Gamma^{(3)}$ ab.

Bei einem Netze mit zwei Grundpunkten P, Q zerfällt die Abbildungskurve $\Gamma^{(3)}$ wie die Jacobische Kurve $J^{(3)}$ in einen Kegelschnitt und eine Gerade, welch' letztere dem Büschel der o-Geradenpaare korrespondiert. Liegt schliesslich ein Netz mit drei Grundpunkten vor, so setzt sich seine Abbildungskurve aus drei Geraden zusammen, entsprechend der Tatsache, dass die Geradenpaare des Netzes drei Büschel bilden.

Bezüglich der beiden weiteren Reihen ein-, zwei- und dreifach spezieller Netze, deren gemeinsames Merkmal das Auftreten einer oder mehrerer Doppelgeraden ist, sei bemerkt, dass bei diesen Netzen die ausnahmslos eindeutige Beziehung der Punktreihen der Jacobischen und der Abbildungs-Kurve aufhört; vielmehr entspricht jedem Punkte einer Doppelgeraden s ein und derselbe Punkt $\mathfrak{S}$ auf $\Gamma^{(3)}$.

Die Geraden durch $\mathfrak{S}$ sind die Abbilder der Büschel-Schaaren sich doppelt berührender Kegelschnitte, die die Doppelgerade s als Element enthalten, und da in diesen zwei Geradenpaare — eben in der Doppelgeraden — zusammengefallen sind, so hat jede jener Geraden mit $\Gamma^{(3)}$ in $\mathfrak{S}$ zwei vereinigte Schnitte. $\mathfrak{S}$ charakterisiert sich somit als Doppelpunkt der Abbildungskurve, und zwar im Falle des Netzes $\mathfrak{N}_{(0.1)}$ als eigentlicher Doppelpunkt, dessen Tangenten den beiden Büschel-Schaaren sich vierpunktig berührender Kegelschnitte korrespondieren, im Falle des Netzes $\mathfrak{N}_{(1,1)}$ als Rückkehrpunkt. Da die Zahl der Doppelgeraden des Netzes die Zahl der Doppelpunkte seiner Abbildungskurve bestimmt, so verlaufen die Fälle $\mathfrak{N}_{(0,2)}$ und $\mathfrak{N}_{(0.3)}$ den Fällen $\mathfrak{N}_{(2,0)}$ bzw. $\mathfrak{N}_{(3,0)}$ völlig parallel; dem Schnittpunkte zweier Doppelgeraden entsprechen dabei auf der Abbildungskurve die sämtlichen Punkte der Verbindungsgeraden der beiden zugehörigen Doppelpunkte. Bei einem Netze der Art $\mathfrak{N}_{(2.1)} = \mathfrak{N}_{(2,\overline{2})}$ zerfällt $\Gamma^{(3)}$ in einen Kegelschnitt und eine diesen berührende Gerade; letztere korrespondiert (in der Bezeichnung von No. 14) dem Geradenpaarbüschel (o, A), der Berührungspunkt selbst der Doppelgeraden o, in der zwei unendlich nahe Doppelgeraden vereinigt zu denken sind. Schliesslich im Falle der Netze $\mathfrak{N}_{(1.2)} = \mathfrak{N}_{(\bar{2}.2)}$, $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}_{(4)}$ und $\mathfrak{N}^{\mathrm{II}}_{(4)}$ setzt sich die Abbildungskurve aus je zwei Geraden zusammen, von denen die eine doppelt zu zählen ist.

25. Wir steigen nunmehr zum linearen Kegelschnittsystem dritter Stufe, dem Kegelschnittgebüsche, auf. Ein allgemeines Kegelschnittgebüsche G ist durch zwei Paare konjugierter Punkte A, A′ und B, B′ in allgemeiner Lage definiert. Nach einem Satze Hesses[1]) sind dann auch die Punkte $C = (AB, A'B')$ und $C' = (AB', A'B)$, das dritte Gegeneckenpaar des vollständigen Vierseits, das durch die beiden Gegeneckenpaare A, A′ und B, B′ bestimmt ist, bezüglich aller Kegelschnitte des Systems konjugiert.

[1]) Journal für Mathematik Bd. 20 S. 301.

Im Kegelschnittgebüsche G gibt es ∞^2 Geradenpaare, die so über die Ebene verteilt sind, dass jeder Punkt P der Ebene im allgemeinen den Doppelpunkt eines Geradenpaares bildet; dieses ist in dem Doppelstrahlenpaar der Strahleninvolution gegeben, der auf Grund eines bekannten Satzes über das vollständige Vierseit die Strahlen PA, PA′; PB, PB′; PC, PC′ als Paare angehören. Unter den ∞^2 Geradenpaaren des Gebüsches finden sich vier Doppelgeraden, die Seiten $ABC = d_1$, $AB'C' = d_2$, $A'BC' = d_3$, $A'B'C = d_4$ des erwähnten vollständigen Vierseits.

Unter den Büscheln sind diejenigen für uns besonders interessant, die nur Geradenpaare enthalten. Zur ersten Gattung gehören die drei Geradenpaarbüschel B_I, deren Elemente sich aus einer Seite des Diagonaldreiecks PQR des vollständigen Vierseits und irgend einem Strahl durch die jeweilige Gegenecke zusammensetzen, zur zweiten Gruppe die sechs Büschel (d_1, d_2), (d_1, d_3), (d_1, d_4), (d_2, d_3) (d_2, d_4), (d_3, d_4), die wir insgesamt mit B_{II} bezeichnen wollen.

Unter den ∞^3 Netzen des Gebüsches sind die einfach speziellen Netze in zweifach unendlicher, die zweifach speziellen in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit, schliesslich die dreifach speziellen in endlicher Anzahl vertreten.

Von den einfach speziellen Netzen treten beide Arten auf. Jeder Punkt P der Ebene hebt ein Netz $\mathfrak{N}_{(1.0)}$ aus dem Gebüsche heraus. Andrerseits bestimmt jede der vier Doppelgeraden, etwa d_1, mit irgend zwei Kegelschnitten K_1, K_2 des Gebüsches ein Netz der Art $\mathfrak{N}_{(0.1)}$. Die beiden auf d_1 liegenden bezüglich K_1 und K_2 konjugierten Punkte T, U bestimmen mit den Punkten A′, B′, C′ den Jacobischen Restkegelschnitt des Netzes. Durchlaufen K_1 und K_2 das ganze Gebüsche, so erhält man der Reihe nach alle Netze $\mathfrak{N}_{(0.1)}$, denen die Doppelgerade d_1 als Element angehört; die Jacobischen Kegelschnitte dieser ∞^2 Netze bilden selbst ein Netz mit den Grundpunkten A′, B′, C′.

Unter den doppelt speziellen Netzen heben wir zunächst die Netze mit zwei Grundpunkten hervor. Bei einem solchen Netze zerfällt, wie mehrfach erwähnt, die involu-

torische Korrespondenz der konjugierten Punkte in eine gerade und eine krumme Involution mit gemeinsamen Doppelpunkten. Da nun die drei Punktepaare A, A′; B, B′; C, C′ weder auf einer Geraden noch auf einem Kegelschnitte liegen, so bleibt nur der Fall übrig, dass ein Paar, etwa A, A′, dem geraden Träger, die beiden anderen Paare dem Jacobischen Kegelschnitt angehören. Die Grundpunkte der Netze $\mathfrak{N}_{(2,0)}$ sind darnach die Punktepaare der Involutionen (A, A′), (B, B′), (C, C′), wie umgekehrt von vornherein ersichtlich ist, dass ein Punkt der Geraden AA′, BB′, CC′ ein Netz bestimmt, das noch einen zweiten Grundpunkt besitzt. Die Jacobischen Kegelschnitte dieser drei Reihen von Netzen $\mathfrak{N}_{(2,0)}$ bilden drei Büschel mit den Grundpunkten B, C, B′, C′ bzw. C, A, C′, A′ bzw. A, B, A′, B′.

Je zwei der Doppelgeraden bestimmen mit irgend einem Kegelschnitt des Gebüsches ein Netz der Art $\mathfrak{N}_{(0,2)}$, und irgend ein Punkt auf einer der Doppelgeraden hebt ein Netz $\mathfrak{N}_{(1,1)}$ aus dem Gebüsche heraus.

Ein Eckpunkt des Diagonaldreiecks, etwa P, bestimmt ein dreifach spezielles Netz des Gebüsches, da sich zu dem einen Grundpunkt P noch zwei weitere, Q und R, gesellen; es ist das einzige Netz $\mathfrak{N}_{(3,0)}$. Eine zweite Art dreifach spezieller Netze erhalten wir, wenn wir in den drei Involutionen (A, A′), (B, B′), (C, C′) einen der Doppelpunkte, etwa in der Involution (A, A′) den Doppelpunkt A, betrachten. Der zweite Grundpunkt des durch A bestimmten Netzes hat sich mit A vereinigt; das Netz stellt sich somit als die Gesamtheit aller Gebüschkegelschnitte dar, die AA′ in A berühren; die beiden Doppelgeraden d_1, d_2 gehören ihm an. Solcher Netze $\mathfrak{N}_{(1,2)} \equiv \mathfrak{N}_{(2,2)}$ gibt es sechs. Netze der Art $\mathfrak{N}_{(2,1)} \equiv \mathfrak{N}_{(2\,2)}$ sind im allgemeinen Kegelschnittgebüsche nicht vertreten. Dagegen besitzt es vier Netz-Gewebe, definiert durch ihre Jacobischen Dreiseite ($d_1\ d_2\ d_3$), ($d_2\ d_3\ d_4$), ($d_3\ d_4\ d_1$) und ($d_4\ d_1\ d_2$).

26. Zwischen unserem Gebüsche G und dem Punktraume sei nun irgend eine Kollineation festgelegt. Wir fragen nach dem Ort der Punkte, die den ∞^2 Geraden-

paaren des Gebüsches korrespondieren. Für die Ordnung der Fläche ergibt sich auf Grund einer ganz der obigen (No. 23) nachgebildeten Betrachtung die Zahl 3. Die ∞^3 Büschel $\mathfrak{B}$, die durch zwei unendlich benachbarte Punkte X, X der Ebene aus dem Gebüsche ausgeschieden werden, bilden sich in dem Komplexe der Tangenten der Fläche $\Phi^{(3)}$ ab. Ist X der Doppelpunkt irgend eines Geradenpaares des Gebüsches, so gibt es, entsprechend den ∞^1 von X ausstrahlenden Richtungen XX, ∞^1 Büschel $\mathfrak{B}$, sämtlich von der Art, dass ihre Elemente sich bezüglich in X berühren. Alle diese Büschel $\mathfrak{B}$ gehören dem Netze $\mathfrak{N}_{(1.0)}$ an, das durch den Grundpunkt X aus dem Gebüsche herausgehoben wird. Die diesem Netze korrespondierende Ebene berührt demnach $\Phi^{(3)}$ in dem Punkte, der vermöge der Kollineation dem Geradenpaare (X) zugeordnet ist. So gelangen wir zu dem Resultat, dass sich die Netze $\mathfrak{N}_{(1,0)}$ des Gebüsches in die Tangentialebenen der Fläche $\Phi^{(3)}$ abbilden. Wir fragen weiter nach der Klasse der Oberfläche, d. i. nach der Zahl der Tangentialebenen, die durch eine Gerade gehen. Auf unser Gebüsche übertragen lautet die Frage: Wie vielen Netzen $\mathfrak{N}_{(1.0)}$ gehört irgend ein Büschel des Gebüsches an? Ersichtlich bestimmt jeder der vier Grundpunkte des Büschels ein Netz der Art $\mathfrak{N}_{(1.0)}$, dem das ganze Büschel angehört, und so erhalten wir für die Klasse der Fläche die Zahl 4.

Wir gehen nun daran, die Geraden der Fläche selbst zu studieren. Den sechs Geradenpaarbüscheln B_{II} entsprechen ebensoviele Geraden auf $\Phi^{(3)}$, die wir nach den Büschelscheiteln mit a, a′, b, b′, c, c′ bezeichnen wollen. Da das Büschel A (d_1, d_2) mit den Büscheln B (d_1, d_3) und C (d_1, d_4) die Doppelgerade $d_1 = ABC$, mit den Büscheln B′ (d_2, d_4) und C′ (d_2, d_3) die Doppelgerade $d_2 = AB'C'$ gemeinsam hat, zum Büschel A′ (d_3, d_4) aber „windschief“ ist, so folgt für die zugehörigen Geraden, dass a von b und c bzw. b′ und c′ je in dem nämlichen Punkte getroffen wird, der Geraden a′ dagegen nicht begegnet. Jene sechs Geraden sind somit auf $\Phi^{(3)}$ so angeordnet, dass sie die Kanten eines Tetraeders

bilden, dessen Ecken D_1, D_2, D_3, D_4 den vier Doppelgeraden des Gebüsches korrespondieren, und dessen Ebenen die Abbilder seiner vier Netz-Gewebe $\mathfrak{N}_{(0.3)}$ darstellen. Die vier ausgezeichneten Punkte D sind Doppelpunkte der Fläche; denn da in jedem Büschel, das eine Doppelgerade, etwa d_1, enthält, zwei Geradenpaare in d_1 zusammengefallen sind, so hat die dem Büschel korrespondierende Gerade in D_1 mit der Fläche zwei vereinigte Schnitte, und so jede durch D_1 gehende Gerade. Die Doppelpunkte D charakterisieren sich als Knotenpunkte oder konische Doppelpunkte, d. h. sie besitzen einen Anschmiegungskegel zweiten Grades. Die Kanten des Anschmiegungskegels etwa des Doppelpunktes D_1 entsprechen den ausgezeichneten Büschel-Schaaren, deren Kegelschnitte sich in den Punkten von d_1 vierpunktig berühren. Jede Gerade des Raumes begegnet zwei Kanten des Anschmiegungskegels D_1, da aus jedem Büschel des Gebüsches zwei Kurven solchen Büschel-Schaaren einander superoskulierender Kegelschnitte angehören, diejenigen beiden, welche d_1 berühren. In die Tangentialebenen des Anschmiegungskegels D_1, die die Fläche $\Phi^{(3)}$ in einer Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze in D_1 schneiden, bilden sich die Netze der Art $\mathfrak{N}_{(1.1)}$ ab, die durch einen Punkt der Doppelgeraden d_1 aus dem Gebüsche ausgeschieden werden.

Den Geradenpaarbüscheln B_I, den Büscheln (QR, P), (RP, Q) und (PQ, R), korrespondieren auf $\Phi^{(3)}$ drei weitere Geraden, die wir mit p, q und r bezeichnen wollen. Da je zwei dieser drei Büschel immer ein Geradenpaar gemeinsam haben, so bilden p, q, r ein Dreiseit, dessen Ebene dem Netze $\mathfrak{N}_{(3.0)}$ des Gebüsches entspricht. Jedes Büschel B_I begegnet auch zweien der sechs Büschel B_{II}; so hat z. B. das Büschel (QR, P) mit den Büscheln A (d_1, d_2) bzw. A′ (d_3, d_4) auf Grund der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits die Geradenpaare (QR, PA) bzw. (QR, PA′) gemeinsam. An jeder der drei Geraden p, q, r hängen somit zwei Gegenkanten des Tetraeders $D_1 D_2 D_3 D_4$, und zwar an p die Geraden a, a′, an q die Geraden b, b′,

an r die Geraden c, c′. Den drei Reihen der Netze mit zwei Grundpunkten entsprechen die Ebenenbüschel um p, q, r. Sind $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, die der Involution (A, A′) angehören, die Grundpunkte eines solchen Netzes $\mathfrak{N}_{(2,0)}$, π die ihm korrespondierende Ebene durch p, so bilden sich die beiden Übergangsgeradenpaare ($\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$P) und ($\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$P) des Netzes in die Punkte ab, in denen der von π ausser p ausgeschnittene Kegelschnitt k über p hinwegläuft. Da nun in allen Netzbüscheln, die eines jener beiden Geradenpaare enthalten, zwei Geradenpaare zusammenfallen, so sind alle Geraden der Ebene π durch die Begegnungspunkte von k und p Tangenten der Fläche, d. h. π ist eine Doppelberührungsebene von $\Phi^{(3)}$. Die drei Ebenbüschel p, q, r repräsentieren somit den Torsus dritter Klasse der Doppelberührungsebenen unserer Fläche. Die Ebene (p, q, r) ist ihre einzige dreifache Berührungsebene. Bei den Ebenen (p, a) und (p, a′) stellen a und a′ je doppelt gezählt den Restkegelschnitt k dar, da in den entsprechenden Netzen der Art $\mathfrak{N}_{(1,2)} \equiv \mathfrak{N}_{(2,2)}$ die Büschel A(d_1, d_2) bzw. A′(d_3, d_4) gleichfalls zweifach zu rechnen sind (No. 14). Die Ebenen (p, a) und (p, a′) berühren somit die Fläche längs der in ihnen liegenden Tetraederkanten, und ähnliches gilt bezüglich der Ebenen (q, b), (q, b′), (r, c), (r, c′).

Erwähnt sei schliesslich noch, dass, wenn man die Ecken des Koordinatentetraeders in die Doppelpunkte D_1, D_2, D_3, D_4 legt, die Gleichung der Fläche $\Phi^{(3)}$, die gewöhnlich als die Cayleysche Fläche[1]) bezeichnet wird, die einfache Gestalt: $x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 = 0$ annimmt.

27. Aus der eindeutigen Beziehung zwischen den Geradenpaaren des Gebüsches G in σ und den Punkten der Cayleyschen Fläche geht wiederum eine Verwandtschaft zwischen den Punkten von σ und den Punkten der $\Phi^{(3)}$ her-

[1]) Cayley, Journ. de Liouville, 1. Serie, Bd. 9, S. 285; Phil. Trans., 1869, S. 313. Vgl. ferner: R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, 1867, S. 380, 381.

vor, wenn wir die Geradenpaare durch ihre Doppelpunkte ersetzen. Wiederum ist aber diese Beziehung nicht ausnahmslos eindeutig; vielmehr entsprechen den Punkten A, A′, B, B′, C, C′ in σ beziehentlich alle Punkte der Tetraederkanten a, a′, b, b′, c, c′, und wenn wir von $\Phi^{(3)}$ ausgehen, den Knotenpunkten D_1, D_2, D_3, D_4 beziehentlich alle Punkte der Geraden d_1, d_2, d_3, d_4 in σ. Ist g irgend eine Gerade der Ebene σ, N ein beliebiges Netz des Gebüsches, so gehören von den Geradenpaaren, deren Doppelpunkte mit g incidieren, im allgemeinen drei dem Netze N an, diejenigen nämlich, deren Doppelpunkte in den Schnittpunkten von g mit der Jacobischen Kurve des Netzes N liegen. Die der Geraden g auf $\Phi^{(3)}$ korrespondierende Raumkurve begegnet somit der dem Netze N zugeordneten Ebene — und demnach jeder Ebene — in drei Punkten, ist also von der dritten Ordnung; sie läuft, da g den vier Doppelgeraden des Gebüsches begegnet, durch jeden der vier Knotenpunkte der Fläche. Die Seiten des Diagonaldreiecks PQR insbesondere bilden sich in die Geraden p, q, r von $\Phi^{(3)}$ ab. Einer Kurve 3. Ordnung in σ, die durch die 6 Fundamentalpunkte A, A′, B, B′, C, C′ hindurchgeht, entspricht, da sie, wie leicht zu erweisen, die Jacobische Kurve für ein Netz des Gebüsches ist, der ebene Schnitt 3. Ordnung der diesem Netze korrespondierenden Ebene mit der Abbildungsfläche $\Phi^{(3)}$.

Es genügt, auf diese Eigenschaften hinzuweisen, um zu erkennen, dass die Verwandtschaft zwischen den Punkten der Fläche $\Phi^{(3)}$ und der Ebene σ nichts anderes ist als die von Clebsch und Cremona gefundene ebene Abbildung der kubischen Fläche mit den durch die Spezialität der Cayleyschen Fläche bedingten Modifikationen.

28. Das allgemeine Kegelschnittgebüsche G ist von der Mannigfaltigkeit ∞^8. Ein einfach spezielles Gebüsche $\mathfrak{G}_0$ (Mächtigkeit ∞^7) entsteht, wenn wir von den beiden bestimmenden Paaren konjugierter Punkte J, K und L, M[1])

[1]) Eine Veränderung der Bezeichnung ist hier nicht zu umgehen.

den einen Punkt, etwa M, so wählen, dass er mit der Verbindungsgeraden JK der Punkte des anderen Paares inzidiert. In JK vereinigen sich dann zwei Seiten des vollständigen Vierseits, ausserdem fallen auch zwei seiner Diagonalen in JK hinein. Wir wollen auch hier vorerst, soweit es nötig, die im Gebüsche enthaltenen Systeme niederer Stufe und die ausgearteten Geradenpaare aufzeigen.

$\mathfrak{G}_0$ besitzt drei Doppelgeraden $LK = d_1$, $LJ = d_2$ und $JK = d_3$, von denen d_3 als Verbindungsgerade konjugierter Punkte eine besondere Stellung einnimmt. In $\mathfrak{G}_0$ treten ferner fünf Büschel auf, die nur Geradenpaare enthalten, nämlich die Büschel $J(d_2, d_3)$, $K(d_1, d_3)$, $L(d_1, d_2)$, (d_3, M) und (LM, N), wo N den dem M bezüglich J, K zugeordneten vierten harmonischen Punkt bezeichnet; die drei an erster Stelle genannten Geradenpaarbüschel gehören der zweiten Art, die beiden letzten der ersten an. Bezüglich der speziellen Netze gilt, soweit in ihnen die Doppelgeraden d_1, d_2 auftreten, ähnliches wie beim allgemeinen Gebüsche G; anders dagegen liegen die Verhältnisse bei denjenigen Netzen, die d_3 enthalten. Jeder Punkt Z von d_3 hebt aus dem Gebüsche $\mathfrak{G}_0$ ein Netz heraus, das noch einen zweiten Grundpunkt Z', den dem Z bezüglich J, K zugeordneten vierten harmonischen Punkt, besitzt, also ein Netz $\mathfrak{N}_{(2.1)}$ $\mathfrak{N}_{(2.2)}$ ist; für alle seine Elemente ist M'L die Polare von M, wo wiederum Z, Z', M, M' einen harmonischen Wurf bilden. Unter diesen Netzen ist vierfach speciell das Netz $\mathfrak{N}_{(4)}^{\mathrm{I}}$, das M oder N im Gebüsche bestimmt, dessen Grundpunkte M, N und der M auf ML unendlich benachbarte Punkt sind. Zur zweiten Art $\mathfrak{N}_{(4)}^{\mathrm{II}}$ der vierfach speziellen Netze gehören die beiden Netze, deren Elemente dadurch definiert sind, dass sie die Gerade JK in J bzw. K berühren und M und JL bzw. M und KL bezüglich ihrer polar sind.

29. Ist das einfach spezielle Gebüsche $\mathfrak{G}_0$ kollinear auf den Punkraum bezogen, so entsprechen auf der Abbildungsfläche, die wie im allgemeinen Falle dritter Ordnung und

vierter Klasse ist, den oben genannten fünf Geradenpaarbüscheln ebenso viele Geraden, die wir mir mit i, k, l, m, n bezeichnen wollen. Von ihnen liegen i, k, l in einer Ebene; k und l begegen sich im Doppelpunkte D_1, i und l im Doppelpunkte D_2, i und k im Doppelpunkte D_3. Die Gerade m, in die sich das Büschel (d_3, M) abbildet, geht von D_3 aus. Die Gerade n, welche dem Büschel (LM, N) korrespondiert, begegnet m in dem Punkte, der dem Geradenpaare (d_3, LM) korrespondiert, und l in dem Punkte, der dem Geradenpaare (LM, LN) entspricht. D_1 und D_2 sind wie im allgemeinen Falle konische Doppelpunkte der Fläche. Nicht aber D_3! Denn während bei d_1 und d_2 jeder Punkt Superoskulationspunkt einer Büschel-Schaar sich vierpunktig berührender Kegelschnitte ist, trifft dies bei d_3 nur in den konjugierten Punkten J, K zu, so zwar, dass J und K die Superoskulationspunkte für je ∞^1 solcher ausgezeichneter Büschel-Schaaren bilden, die beziehentlich den beiden oben erwähnten Netzen $\mathfrak{N}_{(4)}^{II}$ angehören. Daraus folgt für die Abbildungsfläche, dass die durch D_3 gehenden Geraden, die in diesem Punkte mit der Fläche drei vereinigte Schnitte haben, beziehentlich in die beiden Ebenen (i, m) und (k, m) fallen, in welche sich jene beiden Netze $\mathfrak{N}_{(4)}^{II}$ abbilden. Der Punkt D_3 stellt sich somit als biplanarer Doppelpunkt der Fläche dar, von der besonderen Art, dass die Schnittgerade m der beiden den Anschmiegungskegel bildenden Ebenen selbst der Fläche angehört; er ist, entsprechend dem Aufbau des Gebüsches, als die Vereinigung zweier Knotenpunkte anzusehen.

Zur Ergänzung fügen wir hinzu, dass unter den beiden Schnittgeraden der Ebenen (i, m), (k, m), (l, n) mit der Fläche die jeweilige Seite des Dreiecks (i, k, l) zweifach zählt, während bei der Ebene (m, n), die dem vierfach speziellen Netz $\mathfrak{N}_{(4)}^{I}$ korrespondiert, die Gerade m doppelt zu rechnen ist. Den ∞^1 Netzen $\mathfrak{N}_{(2,1)} \equiv \mathfrak{N}_{(2,\overline{2})}$ deren Grundpunkte die Paare der Involution (J, K) bilden, entsprechen die Ebenen um m, die aus der Fläche ausser m je einen diese Gerade in D_3 berührenden Kegelschnitt ausschneiden.

Die Gleichung der Abbildungsfläche des Gebüsches $\mathfrak{G}_0$ nimmt, wenn man die Ecken des Koordinatentetraeders (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) in die Punkte $D_1 = (k, l)$, $D_2 = (i, l)$, (m, n) und $D_3 = (i, k)$ legt, die Gestalt: $x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2) x_3^2 = 0$ an[1]).

30. Doppelt speziell ist das Kegelschnittgebüsche γ, das einen Grundpunkt P besitzt. Ist A, B das neben P bestimmende Paar konjugierter Punkte, so bestimmen A, B auf ihrer Verbindungsgeraden $AB = o$ eine hyperbolische Punktinvolution, zu der die Strahleninvolution mit den Doppelstrahlen $PA = a$ und $PB = b$ perspektiv liegt. Die Paare dieser Involution bezeichnen wir mit (x, x'), (y, y') u. s. w., die Paare der Punktinvolution (A, B) entsprechend mit (X, X'), (Y, Y') u. s. w.

Jeder Punkt Z der Ebene ist wiederum Doppelpunkt eines Geradenpaares des Gebüsches, das sich aus der Geraden ZP und dem Strahl zusammensetzt, welcher nach dem dem Punkte (ZP, o) in der Involution (A, B) konjugierten Punkte hingeht. Die Zahl der Doppelgeraden hat sich bis auf zwei, a und b, vermindert. Weiterhin besitzt unser Gebüsche γ im Gegensatze zu den bisher betrachteten Gebüschen G und $\mathfrak{G}_0$ nicht eine endliche Zahl, sondern eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Büscheln, die nur Geradenpaare enthalten, nämlich alle Büschel der Art (x, X'), (y, Y') . . . ., (x', X), (y', Y) . . . . In diesem System von Geradenpaarbüscheln findet eine Paarung statt, indem den Büscheln (x, X'), (y, Y') . . . . die Büschel (x', X), (y', Y) . . . . auf natürliche Weise zugeordnet erscheinen. Die beiden Reihen begegnen sich in den Büscheln (a, A) und (b, B), die somit gewissermassen die Doppelelemente in jener Zuordnung darstellen. Ausserhalb des gekennzeichneten Systems stehen die beiden Geradenpaarbüschel P(a, b) und (o, P).

Die Netze des Gebüsches sind sämtlich von der Spezialität $\mathfrak{N}_{(1.0)}$. Von den zweifach speziellen Netzen sind

[1]) Cayley, Phil. Trans., 1869, S. 317.

zwei Arten je in doppelt unendlicher Mannigfaltigkeit vertreten, da jeder Punkt der Ebene aus dem Gebüsche ein Netz $\mathfrak{N}_{(2.0)}$ ausscheidet und irgend zwei Kegelschnitte des Gebüsches mit einer der beiden Doppelgeraden ein Netz $\mathfrak{N}_{(1,1)}$ bestimmen. Insonderheit hebt ein Punkt X von o ein Netz $\mathfrak{N}_{(3.0)}$ aus dem Gebüsche heraus, dessen dritter Grundpunkt der X in der Involution (A, B) gepaarte Punkt X′ ist, ferner ein Punkt von a oder b ein Netz $\mathfrak{N}_{(2,1)} \equiv \mathfrak{N}_{(2,\overline{2})}$, und schliesslich ein P unendlich benachbarter Punkt ein Netz $\mathfrak{N}_{(1\,2)} \equiv \mathfrak{N}_{(2\,2)}$. Die Punkte A und B bestimmen im Gebüsche je ein vierfach spezielles Netz der Art $\mathfrak{N}_{(4)}{}^{\mathrm{I}}$, die auf P auf a und b unendlich benachbarten Punkte je ein vierfach spezielles Netz $\mathfrak{N}_{(4)}{}^{\mathrm{II}}$.

31. Ist unser Gebüsche γ kollinear auf den Punktraum bezogen, so entsprechen seinen ∞^2 Geradenpaaren wiederum die Punkte einer Fläche 3. Ordnung, die diesmal noch speziellerer Art ist. Wir übergehen die Ableitung ihrer Klasse und wenden uns sofort der Betrachtung ihrer Geraden zu. Entsprechend den ∞^1 Geradenpaarbüscheln (x, X′) . . . des Gebüsches erweist sich die Abbildungsfläche als Regelfläche, und zwar als windschiefe Regelfläche 3. Grades, da zwei aufeinanderfolgende Erzeugende, etwa zugehörig zu den Büscheln (x, X′) und (y, Y′), wo x, y benachbarte Strahlen durch P bezeichnen, im allgemeinen sich nicht scheiden. Auf der Regelfläche $\rho^{(3)}$ liegen noch zwei ausgezeichnete Geraden d und e, die den Geradenpaarbüscheln P(a, b) und (o, P) korrespondieren. d stellt eine Doppelgerade der Fläche dar; denn in jedem Büschel, das irgend ein Geradenpaar (x, x′) des Büschels P(a, b) enthält, haben sich von den drei Geradenpaaren zwei in (x, x′) vereinigt, und das hat für die jenem Büschel entsprechende Gerade zur Folge, dass ihr Treffpunkt mit d zwei der Schnittpunkte mit der Fläche repräsentiert. d ist zugleich zweifache Leitlinie, da von jedem ihrer Punkte, wiederum etwa dem Geradenpaare (x, x′) korrespondierend, zwei Erzeugende g, g′ ausgehen, in denen sich die beiden gepaarten Büschel (x, X′), (x′, X) abbilden. Ausnahmestellen in dieser

Hinsicht sind die beiden Punkte von d, die den Doppelgeraden a, b zugeordnet sind. Ebenso wie sich in den Büscheln (a, A) und (b, B) je zwei Geradenpaarbüschel vereinigt haben, so sind auch die von jenen beiden Punkten ausstrahlenden Erzeugenden t_a, t_b als die Vereinigung je zweier unendlich benachbarten Erzeugenden anzusehen; in t_a und t_b erkennen wir somit die beiden Torsalen der Regelfläche. Im Gegensatze zu d ist e nur einfache Leitlinie von $\rho^{(3)}$; denn von irgend einem ihrer Punkte, der etwa dem Geradenpaar (o, x) entspricht, geht nur eine Erzeugende der Fläche aus, diejenige, die dem Büschel (x, X′) korrespondiert. e zählt ersichtlich nur einfach auf $\rho^{(3)}$. Die beiden Leitgeraden sind windschief, da die entsprechenden Büschel kein Element gemeinsam haben.

32. Interessant ist es, die Ebenen zu betrachten, die den verschiedenen Arten der zwei- und mehrfach speziellen Netze des Gebüsches γ entsprechen, und die Art ihrer Schnittkurven mit der Abbildungsfläche $\rho^{(3)}$ festzustellen. Es korrespondieren den ∞^2 Netzen $\mathfrak{N}_{(2,0)}$ die Tangentialebenen von $\rho^{(3)}$, die aus der Fläche einen Kegelschnitt und eine diesen in zwei Punkten treffende Erzeugende ausschneiden. Während im allgemeinen die Schnittkurve 3. O. einer Ebene mit $\rho^{(3)}$ in dem Punkte, in den sie von der Doppelgeraden d getroffen wird, einen Doppelpunkt besitzt, stellen in den den Netzen $\mathfrak{N}_{(1,1)}$ entsprechenden Ebenen der Bündel (d, t_a) bzw. (d, t_b) diese ausgezeichneten Punkte Rückkehrpunkte der Schnittkurve 3. O. dar. Die Netze $\mathfrak{N}_{(3,0)}$ bilden sich in die Ebenen durch die Leitgerade e ab, die immer zwei sich auf d begegnende Erzeugende g, g′ aufnehmen und Doppelberührungsebenen der Fläche sind; insbesondere entsprechen die Ebenen, die e mit je einer der beiden Torsalen t_a, t_b verbinden, den beiden vierfach speziellen Netzen $\mathfrak{N}_{(4)}^1$. Andrerseits korrespondieren den Netzen $\mathfrak{N}_{(1,2)} = \mathfrak{N}_{(2,2)}$ die Ebenen um die Doppelgerade d; sie nehmen je eine Erzeugende g auf, so zwar dass d doppelt, g einfach zählt, und repräsentieren die Berührungsebenen der Regelfläche in den Punkten von d. Da von jedem

Punkte der Doppelgeraden zwei Erzeugende g, g′ ausgehen, so entsteht im Ebenenbüschel um d eine involutorische Paarung, deren Doppelemente, die Ebenen (d, t_a) und (d, t_b), den vierfach speziellen Netzen $\mathfrak{N}_{(4)}^{II}$ entsprechen; mit anderen Worten: Die Punkte der Doppelgeraden d sind bis auf zwei uniplanare, die Punkte (d, t_a), (d, t_b), sämtlich biplanar. Die Netze $\mathfrak{N}_{(2\,1)} \equiv \mathfrak{N}_{(2,\overline{2})}$ schliesslich bilden sich in den Ebenen durch eine der beiden Torsalen ab; der Restschnitt ist eine die betr. Torsale in ihrem Treffpunkte mit d berührender Kegelschnitt.

Die Gleichung der Regelfläche 3. Grades mit einer doppelten und einer einfachen Leitgeraden[1]) nimmt, wenn man die Ecken (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) des Koordinatentetraeders in die Punkte (e, t_a), (e, t_b), (d, t_b), (d, t_a) legt, die einfache Gestalt: $x_3 x_1^2 - x_4 x_2^2 = 0$ an.

33. Besitzt ein Kegelschnittgebüsche neben P noch einen zweiten Grundpunkt Q, so ergibt sich als Ort der Punkte, die den (P, Q)-Geradenpaaren kollinear entsprechen, wie im dritten Kapitel gezeigt, eine Fläche 2. Grades; diese wird durch die Tangentialebene ω im Punkte Ω, deren Punkte den o-Geradenpaaren korrespondieren, zur vollen Ordnung 3 ergänzt.

Auf derselben Stufe wie das Kegelschnittgebüsche mit zwei Grundpunkten P, Q (Mannigfaltigkeit: ∞^4) steht das Gebüsche, das als Inbegriff aller Kegelschnitte definiert ist, inbezug auf welche ein Punkt P und eine Gerade p polar sind. Die Geradenpaare eines solchen Gebüsches zerfallen in zwei Gruppen: Die Geradenpaare der einen, deren Doppelpunkte in P liegen, bilden das Netz $\mathfrak{N}(P)$, das nur Geradenpaare enthält; die Doppelpunkte Z der Geradenpaare der zweiten Gruppe gehören der Geraden p an, und zwar bestimmt jeder Punkt Z von p ein ganzes Geradenpaarbüschel (p, ZP). Wird das Gebüsche (P, p) kollinear auf

---

[1]) Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie Bd. I, S. 50, 51; vgl. ferner Reye, Geometrie der Lage 1. Abt. S. 246 flg.

den Punktraum bezogen, so bilden sich die Elemente des Netzes $\mathfrak{N}(P)$ in eine Ebene π ab. Den Geradenpaaren der zweiten Gruppe entsprechen die Punkte eines Kegels 2. Grades; seine Kanten korrespondieren den Büscheln (p, ZP), seine Spitze der Doppelgeraden p, die Punkte seiner Schnittkurve mit der Ebene π den Doppelgeraden des Netzes $\mathfrak{N}(P)$.

Berichtigung.

S. 10 Zeile 3 v. unten P_0 statt p_0.

S. 34 Zeile 14 v. unten XP, XQ, $\overline{X}P$, $\overline{X}Q$ statt XP, $\overline{X}Q$, $\overline{X}Q$.

Lebenslauf.

Ich, Arthur Jopke, wurde am 13. August 1880 als zweiter Sohn des später verstorbenen Kaufmanns W. Jopke zu Breslau geboren und bin evangelischer Konfession. Ich besuchte acht Jahre hindurch das städtische Realgymnasium zu Neisse und wurde Ostern 1900 von dieser Anstalt mit dem Zeugnis der Reife entlassen. Hierauf bezog ich die Universität Breslau, um mich vornehmlich dem Studium der Mathematik und der Physik zu widmen, und hörte dort die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren bzw. Dozenten:

Appel, Baumgartner, Ebbinghaus, Freudenthal, Hoffmann, London, Lummer, Meyer, Neumann, Pillet, Rosanes, Sarrazin, Schaefer, Sturm, Watkin.

Am 13. Januar 1906 bestand ich die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen, und zwar wurde mir die Lehrbefähigung in Mathematik und Physik für die erste, in Französisch für die zweite Stufe sowie in philosophischer Propädeutik zuerkannt. Die Vorbereitungszeit für den praktischen Schuldienst absolvierte ich an den Kgl. Gymnasien zu Sagan und Liegnitz und an der Oberrealschule zu Breslau. Am 1. April 1908 wurde ich vom Magistrat der Stadt Breslau zum Oberlehrer gewählt und amtiere seitdem an der Ev. Realschule 2.

Es ist mir Bedürfnis, auch an dieser Stelle Herrn Geheimrat Sturm, der mir die Anregung zur vorliegenden Arbeit gegeben, für das stete Interesse zu danken, mit dem er ihre Abfassung begleitet hat.